ОТДЕЛ VIII

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Двойные интегралы

1°. **Непосредственное вычисление двойного интеграла.** *Двойным интегралом* от непрерывной функции $f(x, y)$, распространенным на ограниченную замкнутую квадрируемую область Ω, называется число

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\,\Delta x_i \Delta y_j,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ и сумма распространяется на те значения i и j, для которых $(x_i, y_j) \in \Omega$.

Если область Ω задана неравенствами

$$a \leqslant x \leqslant b,\quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные функции на сегменте $[a, b]$, то соответствующий двойной интеграл может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

2°. **Замена переменных в двойном интеграле.** Если непрерывно дифференцируемые функции

$$x = x(u, v),\quad y = y(u, v)$$

осуществляют одно-однозначное отображение ограниченной и замкнутой области Ω в плоскости Oxy на область Ω' в плоскости Ouv, и якобиан

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

сохраняет постоянный знак в Ω за исключением, быть может, множества меры нуль, то справедлива формула

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v))\,|I|\,du\,dv.$$

В частности, для случая перехода к полярным координатам r и φ по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ имеем:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

3901. Вычислить интеграл $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xy\,dx\,dy$, рассматривая его как предел интегральной суммы, разбивая область интегрирования на квадраты прямыми

$$x = i/n,\ y = j/n \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

и выбирая значение подынтегральной функции в правых верхних вершинах этих квадратов.

3902. Составить нижнюю $\underline{S}$ и верхнюю $\overline{S}$ интегральные суммы для функции $f(x,\ y) = x^2 + y^2$ в области $1 \leqslant x \leqslant 2$, $1 \leqslant y \leqslant 3$, разбивая последнюю на прямоугольники прямыми

$$x = 1 + \frac{i}{n},\ y = 1 + \frac{2j}{n} \qquad (i,\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Чему равны пределы этих сумм при $n \to \infty$?

3903. Приближенно вычислить интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{dx\,dy}{\sqrt{24 + x^2 + y^2}},$$

аппроксимируя область интегрирования системой вписанных квадратов, вершины которых A_{ij} находятся в целочисленных точках, и выбирая значения подынтегральной функции в вершинах этих квадратов, наиболее удаленных от начала координат. Сравнить полученный результат с точным значением интеграла.

3904. Приближенно вычислить интеграл $\iint\limits_S \sqrt{x+y}\,dS$, где S — треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$ и $x + y = 1$, разбив область S прямыми $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $x + y = \text{const}$ на четыре равных треугольника и выбрав значение подынтегральной функции в центрах тяжестей этих треугольников.

3905. Область $S\ \{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ разбита на конечное число квадрируемых частей ΔS_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ диаметра меньше чем δ. При каком значении δ будет обеспечено выполнение неравенства

$$\left|\iint\limits_S \sin(x+y)\,dS - \sum_{i=1}^{n} \sin(x_i + y_i)\,\Delta S_i\right| < 0{,}001,$$

где $(x_i,\ y_i) \in \Delta S_i$?

Вычислить интегралы:

3906. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 (x+y)\, dy$. **3907.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xy^2\, dy$.

3908. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^2 \sin^2\varphi\, dr$.

3909. Доказать равенство

$$\iint\limits_R X(x)\, Y(y)\, dx\, dy = \int\limits_a^A X(x)\, dx \cdot \int\limits_b^B Y(y)\, dy,$$

если R — прямоугольник: $a \leqslant x \leqslant A$, $b \leqslant y \leqslant B$, и функции $X(x)$ и $Y(y)$ непрерывны на соответствующих сегментах.

3910. Вычислить $I = \int\limits_a^A dx \int\limits_b^B f(x, y)\, dy$, если

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y).$$

3911. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$. Доказать неравенство

$$\left[\int\limits_a^b f(x)\, dx\right]^2 \leqslant (b-a) \int\limits_a^b f^2(x)\, dx,$$

где знак равенства имеет место лишь, если $f(x) = \text{const}$.

Указание. Рассмотреть интеграл

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_a^b [f(x) - f(y)]^2\, dy.$$

3912. Какой знак имеют интегралы:

а) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} \ln(x^2+y^2)\, dx\, dy$;

б) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\, dx\, dy$;

в) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}} \arcsin(x+y)\, dx\, dy$?

3913. Найти среднее значение функции

$$f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$$

в квадрате: $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

3914. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$I = \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10} \frac{dx\, dy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}.$$

3915. Найти среднее значение квадрата расстояния точки круга $(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant R^2$ от начала координат.

В задачах **3916—3922** в двойном интеграле $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке для указанных областей Ω.

3916. Ω — треугольник с вершинами $O\,(0, 0)$, $A\,(1, 0)$, $B\,(1, 1)$.

3917. Ω — треугольник с вершинами $O\,(0, 0)$, $A\,(2, 1)$, $B\,(-2, 1)$.

3918. Ω — трапеция с вершинами $O\,(0, 0)$, $A\,(1, 0)$, $B\,(1, 2)$, $C\,(0, 1)$.

3919. Ω — круг $x^2+y^2 \leqslant 1$.

3920. Ω — круг $x^2+y^2 \leqslant y$.

3921. Ω — параболический сегмент, ограниченный кривыми $y=x^2$ и $y=1$.

3922. Ω — круговое кольцо $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$.

3923. Доказать *формулу Дирихле*

$$\int_0^a dx\int_0^x f(x, y)\,dx = \int_0^a dy\int_y^a f(x, y)\,dx \quad (a>0).$$

Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

3924. $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x, y)\,dy$. **3925.** $\int_{-6}^{2} dx\int_{(x^2/4)-1}^{2-x} f(x, y)\,dy$.

3926. $\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x^2} f(x, y)\,dy$.

3927. $\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\,dy$.

3928. $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,dy$.

3929. $\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\,dy \quad (a>0)$.

3930. $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x, y)\,dy$.

3931. $\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x, y)\,dy$.

Вычислить следующие интегралы:

3932. $\iint\limits_{\Omega} xy^2 dx\, dy$, если область Ω ограничена параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = p/2$ $(p > 0)$.

3933. $\iint\limits_{\Omega} \frac{dx\, dy}{\sqrt{2a - x}}$ $(a > 0)$, если область Ω ограничена кратчайшей дугой окружности с центром в точке (a, a) радиуса a, касающейся осей координат, и осями координат.

3934. $\iint\limits_{\Omega} |xy| dx\, dy$, если Ω — круг радиуса a с центром в начале координат.

3935. $\iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, если Ω — параллелограмм со сторонами $y = x$, $y = x + a$, $y = a$ и $y = 3a$ $(a > 0)$.

3936. $\iint\limits_{\Omega} y^2 dx\, dy$, если Ω ограничена осью абсцисс и первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

В двойном интеграле

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy$$

перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, и расставить пределы интегрирования, если:

3937. Ω — круг $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

3938. Ω — круг $x^2 + y^2 \leqslant ax$ $(a > 0)$.

3939. Ω — кольцо $a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$.

3940. Ω — треугольник $0 \leqslant x \leqslant 1$; $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$.

3941. Ω — параболический сегмент $-a \leqslant x \leqslant a$; $x^2/a \leqslant y \leqslant a$.

3942. В каком случае после перехода к полярным координатам пределы интегрирования будут постоянные?

Перейти к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в следующих интегралах:

3943. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x, y)\, dy$, 3944. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy$.

3945. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy.$

3946. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)\, dy.$

3947. $\iint\limits_\Omega f(x, y)\, dx\, dy$, где область Ω ограничена кривой $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ $(x \geqslant 0)$.

Предполагая, что r и φ — полярные координаты, изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

3948. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(\varphi, r)\, dr \quad (a>0).$

3949. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r)\, dr \quad (a>0).$

3950. $\int\limits_a^0 d\varphi \int\limits_0^{\varphi} f(\varphi, r)\, dr \quad (0<a<2\pi).$

Перейдя к полярным координатам, заменить двойные интегралы однократными:

3951. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy.$

3952. $\iint\limits_\Omega f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy, \quad \Omega = \{|y| \leqslant |x|;\ |x| \leqslant 1\}.$

3953. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right) dx\, dy.$

Переходя к полярным координатам, вычислить следующие двойные интегралы:

3954. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy.$

3955. $\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy.$

3956. Квадрат S $\{a<x<a+h,\ b<y<b+h\}$ $(a>0,\ b>0)$ с помощью системы функций

$$u = y^2/x, \quad v = \sqrt{xy}$$

преобразуется в область S'. Найти отношение площади области S' к площади S. Чему равен предел этого отношения при $h \to 0$?

Вместо x и y ввести новые переменные u и v и определить пределы интегрирования в следующих двойных интегралах:

3957. $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\, dy \quad (0 < a < b;\ 0 < \alpha < \beta)$, если $u = x$, $v = y/x$.

3958. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{1-x}^{2-x} f(x, y)\, dy$, если $u = x + y$, $v = x - y$.

3959. $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy$, где область Ω ограничена кривыми $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$ $(a > 0)$, если $x = u\cos^4 v$, $y = u \sin^4 v$.

3960. Показать, что замена переменных

$$x + y = \xi, \quad y = \xi\eta$$

переводит треугольник $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$ в единичный квадрат $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

3961. При какой замене переменных криволинейный четырехугольник, ограниченный кривыми $xy = 1$, $xy = 2$, $x - y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$, перейдет в прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат?

Произведя соответствующие замены переменных, свести двойные интегралы к однократным:

3962. $\iint\limits_{|x|+|y| \leqslant 1} f(x + y)\, dx\, dy$.

3963. $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} f(ax + by + c)\, dx\, dy \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$.

3964. $\iint\limits_{\Omega} f(xy)\, dx\, dy$, где область Ω ограничена кривыми $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$ $(x > 0,\ y > 0)$.

Вычислить следующие двойные интегралы:

3965. $\iint\limits_{\Omega} (x + y)\, dx\, dy$, где область Ω ограничена кривой $x^2 + y^2 = x + y$.

3966. $\iint\limits_{|x|+|y| \leqslant 1} (|x| + |y|)\, dx\, dy$.

3967. $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy$, где область Ω ограничена эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3968. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$

3969. $\iint\limits_{\Omega} (x + y)\,dx\,dy$, где область Ω ограничена кривыми $y^2 = 2x,\ x + y = 4,\ x + y = 12.$

3970. $\iint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy$, где область Ω ограничена кривыми $xy = 1,\ x + y = 5/2.$

3971. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant \pi\\ 0\leqslant y\leqslant \pi}} |\cos(x+y)|\,dx\,dy.$

3972. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| dx\,dy.$

3973. $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 2}} \sqrt{|y - x^2|}\,dx\,dy.$

Вычислить интегралы от разрывных функций:

3974. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)\,dx\,dy.$

3975. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\ 0\leqslant y\leqslant 2}} [x + y]\,dx\,dy.$ **3976.** $\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 4} \sqrt{[y - x^2]}\,dx\,dy.$

3977. Доказать, что $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} x^m y^n\,dx\,dy = 0$, если m и n — целые положительные числа и по меньшей мере одно из них нечетно.

3978. Найти

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant \rho^2} f(x,\ y)\,dx\,dy,$$

где $f(x,\ y)$ — непрерывная функция.

3979. Найти $F'(t)$, если

$$F(t) = \iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\ 0\leqslant y\leqslant t}} e^{tx/y^2}\,dx\,dy.$$

3980. Найти $F'(t)$, если

$$F(t) = \iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1} \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy.$$

3981. Найти $F'(t)$, если

$$F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2<t^2} f(x,\ y)\,dx\,dy \quad (t > 0).$$

3982. Доказать, что если $f(x, y)$ непрерывна, то функция

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi, \eta)\, d\eta$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

3983. Пусть линии уровня функции $f(x, y)$ — простые замкнутые кривые и область $S(v_1, v_2)$ ограничена кривыми $f(x, y) = v_1$ и $f(x, y) = v_2$.

Доказать, что

$$\iint\limits_{S(v_1, v_2)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\, dv,$$

где $F(v)$ — площадь, ограниченная кривыми $f(x, y) = v_1$ и $f(x, y) = v$.

Указание. Область интегрирования разбить на части, ограниченные бесконечно близкими линиями уровня функции $f(x, y)$.

§ 2. Вычисление площадей

Площадь области S, расположенной в плоскости Oxy, дается формулой

$$S = \iint\limits_S dx\, dy.$$

Найти площади, ограниченные следующими кривыми:

3984. $xy = a^2$, $x + y = \frac{5}{2} a$ $(a > 0)$.

3985. $y^2 = 2px + p^2$, $y^2 = -2qx + q^2$ $(p > 0, q > 0)$.

3986. $(x-y)^2 + x^2 = a^2$ $(a > 0)$.

Переходя к полярным координатам, вычислить площади, ограниченные следующими кривыми:

3987. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$; $x^2 + y^2 \geqslant a^2$.

3988. $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3989. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)$ $(a > 0)$.

3990. $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy$; $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leqslant a^2$ $(a > 0)$.

Вводя обобщенные полярные координаты r и φ по формулам

$$x = ar\cos^{\alpha}\varphi,\quad y = br\sin^{\alpha}\varphi\quad (r \geqslant 0),$$

где a, b и α — надлежащим образом подобранные постоянные и $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \alpha\, abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$, найти площади, ограниченные следующими кривыми (параметры считаются положительными):

3991. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$.

3992. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$; $x=0$, $y=0$.

3993. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$ $(x>0,\ y>0)$.

3994. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}$ $(x>0,\ y>0)$.

3994.1 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5=\frac{x^2y^2}{c^4}$.

3995. $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$; $x=0$, $y=0$.

Производя надлежащую замену переменных, найти площади фигур, ограниченных кривыми:

3996. $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta)$.

3997. $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=x$, $y=2x$ $(x>0;\ y>0)$.

3998. $y^2=2px$, $y^2=2qx$, $x^2=2ry$, $x^2=2sy$ $(0<p<q;\ 0<r<s)$.

3998.1. $x^2=ay$, $x^2=by$, $x^3=cy^2$, $x^3=dy^2$ $(0<a<b;\ 0<c<d)$.

3998.2. $y=ax^p$, $y=bx^p$, $y=cx^q$, $y=dx^q$, $(0<p<q;\ 0<a<b;\ 0<c<d)$.

3999. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$, $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $4\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ $(a>0,\ b>0)$.

3999.1. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=4$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $8\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ $(x>0,\ y>0)$.

4000. $\dfrac{x^2}{\lambda}+\dfrac{y^2}{\lambda-c^2}=1$, где λ принимает следующие значения: $\dfrac{1}{3}c^2$, $\dfrac{2}{3}c^2$, $\dfrac{4}{3}c^2$, $\dfrac{5}{3}c^2$ $(x>0, y>0)$.

4001. Найти площадь, ограниченную эллипсом

$$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1,$$

где $\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

4002. Найти площадь, ограниченную эллипсами $\dfrac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u}+\dfrac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u}=c^2$ $(u=u_1, u_2)$ и гиперболами $\dfrac{x^2}{\cos^2 v}-\dfrac{y^2}{\sin^2 v}=c^2$ $(v=v_1, v_2)$ $(0<u_1<u_2;$ $0<v_1<v_2;$ $x>0,$ $y>0)$.

Указание. Положить $x=c\operatorname{ch}u\cos v$, $y=c\operatorname{sh}u\sin v$.

4003. Найти площадь сечения поверхности

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$$

плоскостью $x+y+z=0$.

4004. Найти площадь сечения поверхности

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$$

плоскостью $z=1-2(x+y)$.

§ 3. Вычисление объемов

Объем цилиндроида, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f(x, y)\geqslant 0$, снизу плоскостью $z=0$ и с боков

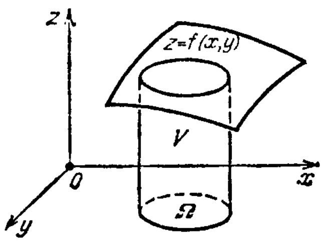

Рис. 14

прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей из плоскости Oxy квадрируемую область Ω (рис. 14), равен

$$V=\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy.$$

4005. Нарисовать тело, объем которого равен интегралу

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy.$$

4006. Изобразить объемы, выражаемые следующими двойными интегралами:

а) $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}}(x+y)\,dx\,dy$;

б) $\iint\limits_{x^2/4+y^2/9\leqslant 1}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dx\,dy$;

в) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy$;

г) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$;

д) $\iint\limits_{\substack{1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\leqslant 2x}}\sqrt{xy}\,dx\,dy$;

е) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sin\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

4007. $z=1+x+y,\quad z=0,\quad x+y=1,\ x=0,\ y=0.$

4008. $x+y+z=a,\quad x^2+y^2=R^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ \ (a\geqslant R\sqrt{2}).$

4009. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0.$

4010. $z=\cos x\cos y,\ z=0,\ |x+y|\leqslant\pi/2,\ |x-y|\leqslant\pi/2.$

4011. $z=\sin\frac{\pi y}{2x},\ z=0,\ y=x,\ y=0,\ x=\pi.$

4012. $z=xy,\ x+y+z=1,\ z=0.$

Переходя к полярным координатам, найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

4013. $z^2=xy,\ x^2+y^2=a^2.$

4014. $z = x + y$, $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $z = 0$ $(x > 0, y > 0)$.

4015. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

4016. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 \geqslant a|x|$ $(a > 0)$.

4017. $x^2 + y^2 - az = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $z = 0$ $(a > 0)$.

4018. $z = e^{-(x^2+y^2)}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$.

4019. $z = c\cos\dfrac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}$, $z = 0$, $y = x\operatorname{tg}\alpha$, $y = x\operatorname{tg}\beta$ $(a > 0,\ c > 0,\ 0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi)$.

4020. $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$.

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями (параметры предполагаются положительными):

4021. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$ $(z > 0)$.

4022. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

4023. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$, $z = 0$.

4024. $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 + \dfrac{z}{c} = 1$, $z = 0$.

4025. $\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)^2 + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4026. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$.

4027. $z^2 = xy$, $x + y = a$, $x + y = b$ $(0 < a < b)$.

4028. $z = x^2 + y^2$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = \dfrac{x}{2}$, $y = 2x$, $z = 0$.

4029. $z = xy$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $z = 0$.

4030. $z = c\sin\dfrac{\pi xy}{a^2}$, $z = 0$, $xy = a^2$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$ $(0 < \alpha < \beta;\ x > 0)$.

4031. $z = x^{3/2} + y^{3/2}$, $z = 0$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

4032. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z}{c} = 1$, $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$, $z = 0$.

4033. $z = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $z = 0$, $\sqrt{x^2+y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ $(y \geqslant 0)$.

4033.1. $z = ye^{-xy/a^2}$, $xy=a^2$, $xy= 2a^2$, $y = m$, $y = n$, $z = 0$ $(0 < m < n)$.

4034. $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(n>0)$.

4035. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^m=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(n>0,\ m>0)$.

§ 4. Вычисление площадей поверхностей

1°. Случай явного задания поверхности. Площадь гладкой криволинейной поверхности $z = z(x, y)$ выражается интегралом

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy\,,$$

где Ω — проекция данной поверхности на плоскость Oxy.

2°. Случай параметрического задания поверхности. Если уравнение поверхности задано параметрически:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

где $(u, v) \in \Omega$, Ω — ограниченная замкнутая квадрируемая область и функции x, y и z непрерывно дифференцируемы в области Ω, то для площади поверхности имеем формулу

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

где

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\,.$$

4036. Найти площадь части поверхности $az = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

4037. Найти площадь поверхности тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$.

4038. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b \leqslant a)$.

4039. Найти площадь части поверхности $z^2 = 2xy$, отсекаемой плоскостями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

4040. Найти площадь части поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, расположенной вне цилиндров $x^2 + y^2 = \pm ax$ (задача Вивиани).

4041. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

4042. Найти площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$.

4043. Найти площадь части поверхности $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, вырезанной плоскостями $x - y = \pm 1$, $x + y = \pm 1$.

4044. Найти площадь части поверхности $x^2 + y^2 = 2az$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$.

4045. Найти площадь части поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, вырезанной плоскостями $x + z = 0$, $x - z = 0$ ($x > 0$, $y > 0$).

4045.1. Найти площадь части поверхности

$$(x^2 + y^2)^{3/2} + z = 1,$$

отсекаемой плоскостью $z = 0$.

4045.2. Найти площадь части поверхности

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{2z}{c} = 1,$$

вырезанной плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$.

4045.3. Найти площадь части поверхности

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z,$$

вырезанной поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (z \geqslant 0).$$

4045.4. Найти площадь части поверхности

$$\sin z = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

отсекаемой плоскостями $x = 1$ и $x = 2$ ($y \geqslant 0$).

4046. Найти поверхность и объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = \frac{1}{3} z^2$, $x + y + z = 2a$ ($a > 0$).

4047. Найти площадь части сферы, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами.

4048. Найти площадь части геликоида $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h\varphi$, где $0 < r < a$, $0 < \varphi < 2\pi$.

4049. Найти площадь части поверхности тора $x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$, $z = a\sin\psi$ $(0 < a \leqslant b)$, ограниченной двумя меридианами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и двумя параллелями $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$.

Чему равна поверхность всего тора?

4050. Найти телесный угол ω, под которым виден из начала координат прямоугольник $x = a > 0$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$.

Вывести приближенную формулу для ω, если a велико.

§ 5. Приложения двойных интегралов к механике

1°. Центр тяжести. Если x_0 и y_0 — координаты центра тяжести пластинки Ω, лежащей в плоскости Oxy, и $\rho = \rho(x, y)$ — плотность пластинки, то

$$x_0 = \frac{1}{M}\iint\limits_{\Omega} \rho x\,dx\,dy, \quad y_0 = \frac{1}{M}\iint\limits_{\Omega} \rho y\,dx\,dy, \tag{1}$$

где $M = \iint\limits_{\Omega} \rho\,dx\,dy$ — масса пластинки.

Если пластинка однородна, то в формулах (1) следует положить $\rho = 1$.

2°. Моменты инерции. I_x и I_y — *моменты инерции* пластинки Ω, лежащей в плоскости Oxy, относительно координатных осей Ox и Oy — выражаются соответственно формулами

$$I_x = \iint\limits_{\Omega} \rho y^2\,dx\,dy, \quad I_y = \iint\limits_{\Omega} \rho x^2\,dx\,dy, \tag{2}$$

где $\rho = \rho(x, y)$ — плотность пластинки.

Рассматривается также *центробежный момент инерции*

$$I_{xy} = \iint\limits_{\Omega} \rho\,xy\,dx\,dy. \tag{3}$$

Полагая $\rho = 1$ в формулах (2) и (3), получим *геометрические моменты инерции* плоской фигуры.

4051. Найти массу квадратной пластинки со стороной a, если плотность пластинки в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки от одной из вершин квадрата и равна ρ_0 в центре квадрата.

Найти координаты центра тяжести однородных пластинок, ограниченных следующими кривыми:

4052. $ay = x^2,\ x + y = 2a\quad (a > 0)$.

4053. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ x = 0,\ y = 0$.

4054. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\ (x > 0,\ y > 0)$.

4055. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}$ (петля).

4056. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy\ (x > 0,\ y > 0)$.

4057. $r = a\,(1 + \cos\varphi),\ \varphi = 0$.

4058. $x = a\,(t - \sin t),\ y = a\,(1 - \cos t)\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, $y = 0$.

4059. Найти координаты центра тяжести круглой пластинки $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, если плотность ее в точке $M\,(x, y)$ пропорциональна расстоянию точки M от точки $A\,(a, 0)$.

4060. Определить кривую, описываемую центром тяжести переменной площади, ограниченной кривыми:

$$y = \sqrt{2px},\ y = 0,\ x = X.$$

Найти моменты инерции I_x и I_y относительно осей координат Ox и Oy площадей ($\rho = 1$), ограниченных следующими кривыми:

4061. $\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1,\ \frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1,\quad y = 0\quad (b_1 > 0,$ $b_2 > 0,\ h > 0)$.

4062. $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2,\ x = 0,\ y = 0\ (0 \leqslant x \leqslant a)$.

4063. $r = a\,(1 + \cos\varphi)$.

4064. $x^4 + y^4 = a^2\,(x^2 + y^2)$.

4065. $xy = a^2,\ xy = 2a^2,\ x = 2y,\ 2x = y\ (x > 0,$ $y > 0)$.

4066. Найти полярный момент

$$I_0 = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

площади S, ограниченной кривой

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2).$$

4066.1. Найти центробежный момент инерции I_{xy} однородной фигуры, ограниченной кривыми

$$ay = x^2,\ ax = y^2\quad (a > 0).$$

4067. Доказать формулу $I_l = I_{l_0} + Sd^2$, где I_l, I_{l_0} — моменты инерции фигуры S относительно двух параллельных осей l и l_0, из которых l_0 проходит через центр тяжести фигуры и d — расстояние между этими осями.

4068. Доказать, что момент инерции плоской области S относительно прямой, проходящей через ее центр тяжести $O(0, 0)$ и составляющей угол α с осью Ox, равен

$$I = I_x \cos^2\alpha - 2I_{xy} \sin\alpha \cos\alpha + I_y \sin^2\alpha,$$

где I_x и I_y — моменты инерции области S относительно осей Ox и Oy и I_{xy} — центробежный момент:

$$I_{xy} = \iint\limits_S \rho\, xy\, dx\, dy.$$

4069. Найти момент инерции правильного треугольника со стороной a относительно прямой, проходящей через центр тяжести треугольника и составляющей угол α с его высотой.

4070. Определить силу давления воды на боковую стенку $x \geqslant 0$ цилиндрического сосуда $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, если уровень воды $z = h$.

4071. Шар радиуса a погружен в жидкость постоянной плотности δ на глубину h (считая от центра шара), где $h \geqslant a$. Найти силу давления жидкости на верхнюю и нижнюю части шаровой поверхности.

4072. Прямой круговой цилиндр, радиус основания которого равен a, а высота b, целиком погружен в жидкость плотности δ так, что центр его находится на глубине h под поверхностью воды, а ось цилиндра составляет угол α с вертикалью. Определить силу давления жидкости на нижнее и верхнее основания цилиндра.

4073. Определить силу притяжения однородным цилиндром $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$, материальной точки $P(0, 0, b)$, если масса цилиндра равна M, а масса точки равна m.

4074. Распределение давления тела на *площадку смятия*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$$

дается формулой $p = p_0 \left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)$.

Определить среднее давление тела на эту площадку.

4075. Луг, имеющий форму прямоугольника со сторонами a и b, равномерно покрыт скошенной травой с плотностью, равной p кгс/м^2. Какую минимальную работу надо затратить, чтобы собрать все сено в центре луга, если работа по транспортировке груза P кгс на расстояние r равна kPr $(0 < k < 1)$.

§ 6. Тройные интегралы

1°. Непосредственное вычисление тройного интеграла. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна и область V ограничена и определяется следующими неравенствами:

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),\quad z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y),$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ — непрерывные функции, то тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$, распространенный на область V, может быть вычислен по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Иногда удобно также применять формулу

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \iint\limits_{S(x)} f(x, y, z)\,dy\,dz,$$

где $S(x)$ — сечение области V плоскостью $x = \text{const}$.

2°. Замена переменных в тройном интеграле. Если ограниченная кубируемая замкнутая область V пространства $Oxyz$ взаимно однозначно отображается на область V' пространства $O'uvw$ с помощью непрерывно дифференцируемых функций

$$x = x(u, v, w),\quad y = y(u, v, w),\quad z = z(u, v, w),$$

причем якобиан $I = \dfrac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ при $(u, v, w) \in V'$, почти всюду (в смысле меры) сохраняет постоянный знак, то справедлива формула

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\,|I|\,du\,dv\,dw.$$

Как частные случаи, имеем: 1) *цилиндрическую систему координат* φ, r, h, где

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad z = h,$$

и

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, h)} = r,$$

и 2) *сферическую систему координат* φ, ψ, r, где

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi,$$

и

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = r^2\cos\psi.$$

Вычислить следующие тройные интегралы:

4076. $\iiint\limits_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, где область V ограничена поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

4077. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, где область V ограничена поверхностями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4078. $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$, где область V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4079. $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz$, где область V ограничена поверхностью

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

4080. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, где область V ограничена поверхностями

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 1.$$

Различными способами расставить пределы интеграции в следующих тройных интегралах:

4081. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x, y, z)\,dz.$

4082. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x, y, z)\,dz.$

4083. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)\,dz.$

Заменить тройные интегралы однократными:

4084. $\int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^{\xi} d\eta \int\limits_0^{\eta} f(\zeta)\,d\zeta.$ **4085.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x+y} f(z)\,dz.$

4086. Найти

$$\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x, y, z)\, dz,$$

если $f(x, y, z) = F'''_{xyz}(x, y, z)$ и a, b, c, A, B, C — постоянные.

Переходя к сферическим координатам, вычислить интегралы:

4087. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$, где область V ограничена поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

4088. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz.$

4089. Перейти к сферическим координатам в интеграле

$$\iiint\limits_V f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) dx\, dy\, dz,$$

где область V ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x = y$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

4090. Произведя соответствующую замену переменных, вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\, dx\, dy\, dz,$$

где V — внутренность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

4091. Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint\limits_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz,$$

где область V ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.

4092. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V x^2 dx\, dy\, dz$, где область V ограничена поверхностями $z = ay^2$, $z = by^2$, $y > 0$ $(0 < a < b)$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$ $(0 < \alpha < \beta)$, $z = h$ $(h > 0)$.

4093. Найти интеграл $\iiint\limits_V xyz\, dx\, dy\, dz$, где область V расположена в октанте $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

и ограничена поверхностями:

$$z=\frac{x^2+y^2}{m},\quad z=\frac{x^2+y^2}{n},\quad xy=a^2,\quad xy=b^2,\quad y=\alpha x,\quad y=\beta x$$

$$(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta;\ 0<m<n).$$

4094. Найти среднее значение функции

$$f(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2$$

в области $x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$.

4095. Найти среднее значение функции

$$f(x,\ y,\ z)=e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$$

в области $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

4096. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$u=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

где $a^2+b^2+c^2>R^2$.

4097. Доказать, что если функция $f(x,\ y,\ z)$ непрерывна в области V и

$$\iiint\limits_{\omega} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=0$$

для любой области $\omega\subset V$, то $f(x,\ y,\ z)\equiv 0$ при $(x,\ y,\ z)\in V$.

4098. Найти $F'(t)$, если:

а) $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$,

где f — дифференцируемая функция;

б) $F(t)=\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\ 0\leqslant y\leqslant t\\ 0\leqslant z\leqslant t}} f(xyz)\,dx\,dy\,dz$,

где f — дифференцируемая функция.

4099. Найти

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} x^m y^n z^p\,dx\,dy\,dz,$$

где m, n и p — целые неотрицательные числа.

4100. Вычислить *интеграл Дирихле*

$$\iiint\limits_{V} x^p y^q z^r(1-x-y-z)^s\,dx\,dy\,dz$$

$$(p>0,\ q>0,\ r>0,\ s>0),$$

где область V ограничена плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, полагая

$$x+y+z=\xi,\quad y+z=\xi\eta,\quad z=\xi\eta\zeta.$$

§ 7. Вычисление объемов с помощью тройных интегралов

Объем области V выражается формулой

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz.$$

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

4101. $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, $y=x$, $y=x^2$.

4102. $z=x+y$, $z=xy$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

4103. $x^2+z^2=a^2$, $x+y=\pm a$, $x-y=\pm a$.

4104. $az=x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$.

4105. $az=a^2-x^2-y^2$, $z=a-x-y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(a>0)$.

4106. $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Переходя к сферическим или цилиндрическим координатам, вычислить объемы, ограниченные поверхностями:

4107. $x^2+y^2+z^2=2az$, $x^2+y^2\leqslant z^2$.

4108. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

4109. $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$.

4110. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^2+y^2=z^2$ $(z\geqslant 0)$ $(0<a<b)$.

В следующих примерах удобно пользоваться обобщенными сферическими координатами

$$r,\ \varphi\ \text{и}\ \psi\left(r\geqslant 0;\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

вводя их по формулам

$$\left.\begin{aligned} x&=ar\cos^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi,\\ y&=br\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi,\\ z&=cr\sin^{\beta}\psi\end{aligned}\right\}\quad (a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta\text{ — постоянные}),$$

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(r,\ \varphi,\ \psi)}=\alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

4111. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$.

4112. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

4112.1. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$.

4113. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$.

4114. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}=1$. 4115. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=1$.

Пользуясь подходящей заменой переменных, вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями (параметры предполагаются положительными):

4116. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4116.1. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4117. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^4=\frac{xyz}{abc}$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4118. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$.

4118.1. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,$ $\geqslant 0)$.

4118.2. $\sqrt[3]{\frac{x}{a}}+\sqrt[3]{\frac{y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{z}{c}}=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,$ $z\geqslant 0)$.

4118.3. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1$.

4119. $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$ $(x>0,\ y>0)$.

4120. $x^2+z^2=a^2$, $x^2+z^2=b^2$, $x^2-y^2-z^2=0$ $(x>0)$.

4121. $(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{a^6z^2}{x^2+y^2}$.

4122. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{h}\cdot e^{-\frac{z^2/c^2}{x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2}}$.

4123. $\dfrac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}}{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}}=\dfrac{2}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)$,

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1,\quad x=0,\quad x=a.$

4124. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\ln\dfrac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}}{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}},\qquad x=0,\quad z=0,$

$\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0,\quad \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1.$

4125. В каком отношении делит объем шара $x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$ поверхность $x^2+y^2+az=4a^2$?

4126. Найти объем и поверхность тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=az$, $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$.

4127. Найти объем параллелепипеда, ограниченного плоскостями

$$a_ix+b_iy+c_iz=\pm h_i\qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

если

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

4128. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+$$
$$+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2,$$

если

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0.$$

4129. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n+\frac{z^{2n}}{c^{2n}}=\frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2}\quad (n>1).$$

4130. Найти объем тела, расположенного в положительном октанте пространства $Oxyz$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$

и ограниченного поверхностями:

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^p}{c^p}=1 \quad (m>0,\ n>0,\ p>0),$$

$$x=0,\ y=0,\ z=0.$$

§ 8. Приложения тройных интегралов к механике

1°. Масса тела. Если тело занимает объем V и $\rho=\rho(x, y, z)$ — плотность его в точке (x, y, z), то *масса тела* равна

$$M=\iiint\limits_V \rho\, dx\, dy\, dz. \qquad (1)$$

2°. Центр тяжести тела. *Координаты центра тяжести* (x_0, y_0, z_0) тела вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho x\, dx\, dy\, dz,\\ y_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho y\, dx\, dy\, dz,\\ z_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho z\, dx\, dy\, dz.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Если тело однородно, то в формулах (1) и (2) можно положить $\rho=1$.

3°. Моменты инерции. *Моментами инерции тела относительно координатных плоскостей* называются соответственно интегралы

$$I_{xy}=\iiint\limits_V \rho z^2 dx\, dy\, dz, \qquad I_{yz}=\iiint\limits_V \rho x^2 dx\, dy\, dz,$$

$$I_{zx}=\iiint\limits_V \rho y^2 dx\, dy\, dz.$$

Моментом инерции тела относительно некоторой оси l называется интеграл

$$I_l=\iiint\limits_V \rho r^2 dx\, dy\, dz,$$

где r — расстояние переменной точки тела (x, y, z) от оси l. В частности для координатных осей Ox, Oy и Oz соответственно имеем:

$$I_x=I_{xy}+I_{xz}, \qquad I_y=I_{yx}+I_{yz}, \qquad I_z=I_{zx}+I_{zy}.$$

Моментом инерции тела относительно начала координат называется интеграл

$$I_0=\iiint\limits_V \rho\,(x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Очевидно, имеем: $I_0=I_{xy}+I_{yz}+I_{zx}$.

4°. Потенциал поля тяготения. *Ньютоновым потенциалом тела* в точке $P(x, y, z)$ называется интеграл

$$u(x, y, z) = \iiint\limits_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r},$$

где V — объем тела, $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$ — плотность тела, и

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

Материальная точка массы m притягивается телом с силой $\mathbf{F} = (X, Y, Z)$, проекции которой X, Y, Z на оси координат Ox, Oy, Oz равны:

$$X = km\frac{\partial u}{\partial x} = km \iiint\limits_V \rho \frac{\xi - x}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$Y = km\frac{\partial u}{\partial y} = km \iiint\limits_V \rho \frac{\eta - y}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$Z = km\frac{\partial u}{\partial z} = km \iiint\limits_V \rho \frac{\zeta - z}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

где k — постоянная закона тяготения.

4131. Найти массу тела, занимающего единичный объем $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, если плотность тела в точке $M(x, y, z)$ дается формулой $\rho = x + y + z$.

4132. Найти массу тела, заполняющего бесконечную область $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1$, если плотность тела меняется по закону $\rho = \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $\rho_0 > 0$ и $k > 0$ постоянны.

Найти координаты центра тяжести однородных тел, ограниченных следующими поверхностями:

4133. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

4134. $z = x^2 + y^2$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4135. $x^2 = 2pz$, $y^2 = 2px$, $x = \frac{p}{2}$, $z = 0$.

4136. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4137. $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ $(z \geqslant 0)$.

4138. $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y = z$.

4139. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{abc}$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0;\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$.

4140. $z = x^2 + y^2$, $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$.

4141. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(n > 0$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0)$.

4142. Определить координаты центра тяжести тела, имеющего форму куба: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, если плотность тела в точке (x, y, z) равна

$$\rho = x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}},$$

где $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < 1$.

Определить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородных тел, ограниченных следующими поверхностями (параметры положительны):

4143. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4144. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. **4145.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

4146. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}$.

4147. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

4147.1. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.

4147.2. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(n > 0;$ $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0)$.

Определить моменты инерции относительно оси Oz однородных тел, ограниченных поверхностями:

4148. $z = x^2 + y^2$, $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$, $z = 0$.

4149. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$ $(z > 0)$.

4149.1. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^5 z$.

4150. Найти момент инерции неоднородного шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ массы M относительно его диаметра, если плотность шара в текущей точке $P(x, y, z)$ пропорциональна расстоянию этой точки от центра шара.

4151. Доказать равенство $I_l = I_{l_0} + Md^2$, где I_l — момент инерции тела относительно некоторой оси l, I_{l_0} — момент инерции относительно оси l_0, параллельной l и проходящей через центр тяжести тела, d — расстояние между осями и M — масса тела.

4152. Доказать, что момент инерции тела, занимающего объем V, относительно оси l, проходящей через его центр тяжести $O(0, 0, 0)$ и образующей углы α, β, γ с осями координат, равен:

$$I_l = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta - \\ -2K_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma,$$

где I_x, I_y, I_z — моменты инерции тела относительно осей координат и

$$K_{xy} = \iiint\limits_V \rho xy\,dx\,dy\,dz, \qquad K_{xz} = \iiint\limits_V \rho xz\,dx\,dy\,dz,$$

$$L_{yz} = \iiint\limits_V \rho yz\,dx\,dy\,dz$$

— центробежные моменты.

4153. Найти момент инерции однородного цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $z = \pm h$, плотности ρ_0 относительно прямой $x = y = z$.

4154. Найти момент инерции относительно начала координат однородного тела плотности ρ_0, ограниченного поверхностью

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

4155. Найти ньютонов потенциал в точке $P(x, y, z)$ однородного шара $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R^2$ плотности ρ_0.

Указание. Положить, что ось $O\zeta$ проходит через точку $P(x, y, z)$.

4156. Найти ньютонов потенциал в точке $P(x, y, z)$ сферического слоя $R_1^2 \leqslant \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R_2^2$, если плотность $\rho = f(R)$, где f — известная функция и $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

4157. Найти ньютонов потенциал в точке $P(0, 0, z)$ цилиндра $\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant \zeta \leqslant h$, постоянной плотности ρ_0.

4158. С какой силой притягивает однородный шар $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R^2$ массы M материальную точку $P(0, 0, a)$ массы m?

4159. Найти силу притяжения однородным цилиндром $\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant \zeta \leqslant h$, плотности ρ_0, точки $P(0, 0, z)$ с единичной массой.

4160. Найти силу притяжения однородным шаровым сектором плотности ρ_0 материальной точки с массой, равной единице, помещенной в его вершине, если радиус шаровой поверхности равен R, а угол осевого сечения сектора равен 2α.

§ 9. Несобственные двойные и тройные интегралы

1°. Случай бесконечной области. Если двумерная область Ω не ограничена и функция $f(x, y)$ непрерывна на Ω, то по определению полагают:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega_n} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

где Ω_n — любая последовательность ограниченных замкнутых квадрируемых областей, исчерпывающая область Ω. Если предел в правой части существует и не зависит от выбора последовательности Ω_n, то соответствующий интеграл называется *сходящимся*; в противном случае — *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный тройной интеграл от непрерывной функции, распространенный на неограниченную трехмерную область.

2°. Случай разрывной функции. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной и замкнутой области Ω всюду, за исключением точки $P(a, b)$, то полагают:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to+0} \iint\limits_{\Omega - U_\varepsilon} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{2}$$

где U_ε есть область диаметра ε, содержащая точку P, и в случае существования предела рассматриваемый интеграл называют *сходящимся*; в противном случае — *расходящимся*.

Предполагая, что вблизи точки $P(a, b)$ имеет место равенство

$$f(x, y) = \varphi(x, y)/r^\alpha,$$

где абсолютная величина функции $\varphi(x, y)$ заключена между числами $m > 0$ и $M > 0$ и $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, получим, что 1) при $\alpha < 2$ интеграл (2) сходится; 2) при $\alpha \geqslant 2$ — расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл (2), если функция $f(x, y)$ имеет линию разрыва.

Понятие несобственного интеграла от разрывной функции легко переносится на случай тройных интегралов.

Исследовать на сходимость несобственные интегралы с бесконечной областью интегрирования ($0 < m \leqslant |\varphi(x, y)| \leqslant M < +\infty$):

4161. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^p}\,dx\,dy.$

4162. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}.$

4163. $\displaystyle\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1+x^2+y^2)^p}\,dx\,dy.$

4164. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|>1} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$ $(p>0,\ q>0)$.

4165. $\displaystyle\iint\limits_{x+y>1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p}\,dx\,dy.$

4166. Доказать, что если непрерывная функция $f(x, y)$ неотрицательна и S_n $(n=1, 2, \ldots)$ — какая-нибудь последовательность ограниченных и замкнутых областей, исчерпывающая область S, то

$$\iint\limits_{S} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{S_n} f(x, y)\,dx\,dy,$$

где левая часть имеет или не имеет смысла одновременно с правой.

4167. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\ |y|\leqslant n}} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \pi,$$

тогда как

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = 0$$

(n — натуральное число).

4168. Показать, что интеграл

$$\iint\limits_{x>1,\, y>1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

расходится, хотя повторные интегралы

$$\int\limits_1^{+\infty} dx \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \quad \text{и} \quad \int\limits_1^{+\infty} dy \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx$$

сходятся.

Вычислить интегралы (параметры положительны):

4169. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{xy>1,\\ x>1}} \frac{dx\,dy}{x^p y^q}.$ **4170.** $\displaystyle\iint\limits_{\substack{x+y>1,\\ 0\leqslant x\leqslant 1}} \frac{dx\,dy}{(x+y)^p}.$

4171. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$ **4172.** $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}.$

4173. $\displaystyle\iint\limits_{y>x^2+1} \frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$. **4174.** $\displaystyle\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y} e^{-(x+y)}dx\,dy$.

Переходя к полярным координатам, вычислить интегралы:

4175. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$.

4176. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

4177. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

Вычислить интегралы:

4178. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f}\,dx\,dy$, где $a<0$, $ac-b^2>0$.

4179. $\displaystyle\iint\limits_{x^2/a^2+y^2/b^2>1} e^{-(x^2/a^2+y^2/b^2)}dx\,dy$.

4180. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{x}{a}\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dx\,dy \quad (0<|\varepsilon|<1)$.

Исследовать на сходимость несобственные двойные интегралы от разрывных функций $(0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M<+\infty)$:

4181. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$, где область Ω определяется условиями: $|y|\leqslant x^2$; $x^2+y^2\leqslant 1$.

4182. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,\ y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\,dx\,dy$.

4183. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}\quad (p>0,\ q>0)$.

4184. $\displaystyle\int\limits_0^a\int\limits_0^a\frac{\varphi(x,\ y)}{|x-y|^p}\,dx\,dy$.

4185. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,\ y)}{(1-x^2-y^2)^p}\,dx\,dy$.

4186. Доказать, что если 1) функция $\varphi(x, y)$ непрерывна в ограниченной области $a \leqslant x \leqslant A$, $b \leqslant y \leqslant B$; 2) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $a \leqslant x \leqslant A$ и 3) $p < 1$, то интеграл

$$\int_a^A dx \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p}\, dy$$

сходится.

Вычислить следующие интегралы:

4187. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy.$

4188. $\displaystyle\int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$ $(a>0)$.

4189. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \ln \sin(x-y)\, dx\, dy,$ где область Ω ограничена прямыми $y = 0$, $y = x$, $x = \pi$.

4190. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Исследовать на сходимость следующие тройные интегралы:

4191. $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\, dx\, dy\, dz,$ где $0 < m \leqslant |\varphi(x, y, z)| \leqslant M < +\infty$.

4192. $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\, dx\, dy\, dz,$ где $0 < m \leqslant |\varphi(x, y, z)| \leqslant M < +\infty$.

4193. $\displaystyle\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dx\, dy\, dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$ $(p>0,\ q>0,\ r>0)$.

4194. $\displaystyle\int_0^a\int_0^a\int_0^a \frac{f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p},$ где $0 < m \leqslant |f(x, y, z)| \leqslant M < +\infty$, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные функции на сегменте $[0, a]$.

4195. $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,\\ |y|\leqslant 1,\\ |z|\leqslant 1}} \frac{dx\, dy\, dz}{|x+y-z|^p}.$

Вычислить интегралы:

4196. $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{x^p y^q z^r}$. **4197.** $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}$.

4198. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$.

4199. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz$.

4200. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1,\,x_2,\,x_3)}dx_1\,dx_2\,dx_3,$$

где $P(x_1,\ x_2,\ x_3) = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j\ (a_{ij}=a_{ji})$ — положительно определенная квадратичная форма.

§ 10. Многократные интегралы

1°. **Непосредственное вычисление кратного интеграла.** Если функция $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ непрерывна в ограниченной области Ω, определяемой неравенствами

$$\begin{cases} x_1' \leqslant x_1 \leqslant x_1'', \\ x_2'(x_1) \leqslant x_2 \leqslant x_2''(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n'(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant x_n''(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_{n-1}), \end{cases}$$

где x_1' и x_1'' — постоянные числа и $x_2'(x_1)$, $x_2''(x_1)$, ..., $x_n'(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})$, $x_n''(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})$ — непрерывные функции, то соответствующий многократный интеграл может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{\Omega}\ldots\int f(x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{x_1'}^{x_1''} dx_1 \int\limits_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} dx_2 \ldots \int\limits_{x_n'(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{x_n''(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\,dx_n.$$

2°. **Замена переменных в кратном интеграле.** Если 1) функция $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ равномерно непрерывна в ограниченной измеримой области Ω; 2) непрерывно дифференцируемые функции

$$x_i = \varphi_i(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n)\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

осуществляют взаимно однозначное отображение области Ω пространства $Ox_1x_2...x_n$ на ограниченную область Ω' пространства $O'\xi_1\xi_2...\xi_n$ и 3) якобиан

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}$$

сохраняет почти всюду постоянный знак (кроме множества меры нуль) в области Ω', то справедлнва формула

$$\iint\limits_{\Omega}\ldots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n =$$
$$= \iint\limits_{\Omega'}\ldots\int f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\,|I|\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n.$$

В частности, при переходе к полярным координатам $(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_1, \\ x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \end{aligned}$$

имеем:

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}.$$

4201. Пусть $K(x, y)$ — непрерывная функция в области R $(a \leqslant x \leqslant b;\ a \leqslant y \leqslant b)$ и

$$K_n(x, y) =$$
$$= \int\limits_a^b\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b K(x, t_1)K(t_1, t_2)\ldots K(t_n, y)\,dt_1dt_2\ldots dt_n.$$

Доказать, что

$$K_{n+m+1}(x, y) = \int\limits_a^b K_n(x, t)\,K_m(t, y)\,dt.$$

4202. Пусть $f = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция в области $0 \leqslant x_i \leqslant x$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Доказать равенство

$$\int\limits_0^x dx_1\int\limits_0^{x_1} dx_2\ldots\int\limits_0^{x_{n-1}} f\,dx_n = \int\limits_0^x dx_n\int\limits_{x_n}^x dx_{n-1}\ldots\int\limits_{x_2}^x f\,dx_1$$

$$(n \geqslant 2).$$

4203. Доказать, что

$$\int\limits_0^t dt_1\int\limits_0^{t_1} dt_2\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\ldots f(t_n)\,dt_n = \frac{1}{n!}\left\{\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}^n,$$

где f — непрерывная функция.

Вычислить следующие многократные интегралы:

4204. а) $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$;

б) $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 (x_1+x_2+\ldots+x_n)^2\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$.

4205. $I_n = \int\int\limits_{\substack{x_1>0,\ x_2>0,\ \ldots,\ x_n>0,\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant a}} \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$.

4206. $\int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} x_1x_2 \ldots x_n dx_n$.

4207. $\int\int\limits_{\substack{x_1>0,\ x_2>0,\ \ldots,\ x_n>0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n<1}} \ldots \int \sqrt{x_1+x_2+\ldots+x_n}\, dx_1 \ldots dx_n$.

4208. Найти объем n-мерного параллелепипеда, ограниченного плоскостями

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \pm h_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$,
если $\Delta = |a_{ij}| \neq 0$.

4209. Найти объем n-мерной пирамиды

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_n} \leqslant 1, \quad x_i \geqslant 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

$$(a_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

4210. Найти объем n-мерного конуса, ограниченного поверхностями

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x_n=a_n.$$

4211. Найти объем n-мерного шара

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leqslant a^2.$$

4212. Найти $\int\int\limits_{\Omega} \ldots \int x_n^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, где область Ω определяется неравенствами

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2 \leqslant a^2, \qquad -\frac{h}{2} \leqslant x_n \leqslant \frac{h}{2}.$$

4213. Вычислить

$$\int\int\limits_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2<1} \ldots \int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2}}.$$

4214. Доказать равенство

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\, du.$$

4215. Доказать равенство

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \ldots \int_0^{x_n} f(x_{n+1})\, dx_{n+1} = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2-u^2)^n f(u)\, du.$$

4216. Доказать *формулу Дирихле*

$$\int\int\ldots\int_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_n > 0 \\ x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant 1}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n+1)} \qquad (p_1, \ p_2, \ldots, \ p_n > 0).$$

4217. Доказать *формулу Лиувилля*

$$\int\int\ldots\int_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_n > 0 \\ x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant 1}} f(x_1+x_2+\ldots+x_n)\, x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots$$

$$\ldots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)} \int_0^1 f(u)\, u^{p_1+p_2+\ldots+p_n-1} du$$

$$(p_1, \ p_2, \ \ldots, \ p_n > 0),$$

где $f(u)$ — непрерывная функция.

Указание. Применить метод математической индукции.

4218. Привести к однократному интегралу n-кратный интеграл $(n \geqslant 2)$

$$\int\int_\Omega\ldots\int f\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

распространенный по области $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leqslant R^2$, где $f(u)$ — непрерывная функция.

4219. Вычислить *потенциал на себя* однородного шара радиуса R и плотности ρ_0, т. е. найти интеграл

$$u = \frac{\rho_0^2}{2} \int\int\int\int\int\int_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leqslant R^2 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 \leqslant R^2}} \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}},$$

где $r_{1,2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

4220. Вычислить n-кратный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_{i=1}^{n} b_ix_i+c\right\}} dx_1dx_2\ldots dx_n,$$

если $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\,(a_{ij}=a_{ji})$ — положительно определенная квадратичная форма.

§ 11. Криволинейные интегралы

1°. **Криволинейный интеграл 1-го рода.** Если $f(x, y, z)$ — функция, определенная и непрерывная в точках гладкой кривой C

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \qquad (1)$$

и ds — дифференциал дуги, то по определению полагают

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \int_{t_0}^{T} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

Особенность этого интеграла состоит в том, что он не зависит от направления кривой C.

2°. **Механические приложения криволинейного интеграла 1-го рода.** Если $\rho = \rho(x, y, z)$ — линейная плотность в текущей точке (x, y, z) кривой C, то *масса кривой* C равна:

$$M = \int_C \rho(x, y, z)\,ds.$$

Координаты центра тяжести (x_0, y_0, z_0) этой кривой выражаются формулами

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_C x\rho(x, y, z)\,ds, \quad y_0 = \frac{1}{M}\int_C y\rho(x, y, z)\,ds,$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\int_C z\rho(x, y, z)\,ds.$$

3°. **Криволинейный интеграл 2-го рода.** Если функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ непрерывны в точках кривой (1), пробегаемой в направлении возрастания параметра t, то полагают

$$\int_C P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int_{t_0}^{T}\{P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)\}\,dt. \qquad (2)$$

При изменении направления обхода кривой C этот интеграл изменяет свой знак на обратный. Механически интеграл (2) представляет собой *работу переменной силы* $\{P, Q, R\}$, точка приложения которой описывает кривую C.

4°. Случай полного дифференциала. Если

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = du,$$

где $u = u(x, y, z)$ — однозначная функция в области V, то независимо от вида кривой C, целиком расположенной в области V, имеем:

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1),$$

где (x_1, y_1, z_1) — начальная и (x_2, y_2, z_2) — конечная точка пути. В простейшем случае, если область V односвязна и функции P, Q и R обладают непрерывными частными производными первого порядка, для этого необходимо и достаточно, чтобы в области V были тождественно выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Тогда в простейшем случае стандартной параллелопидальной области V, функцию u можно найти по формуле

$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz + c,$$

где (x_0, y_0, z_0) — некоторая фиксированная точка области V и c — произвольная постоянная.

Механически этот случай соответствует работе силы, имеющей потенциал.

Вычислить следующие криволинейные интегралы 1-го рода:

4221. $\int\limits_C (x + y)\,ds$, где C — контур треугольника с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$.

4222. $\int\limits_C y^2\,ds$, где C — арка циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \ y = a(1 - \cos t) \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4223. $\int\limits_C (x^2 + y^2)\,ds$, где C — кривая

$$x = a(\cos t + t\sin t), \ y = a(\sin t - t\cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4224. $\int\limits_C xy\,ds$, где C — дуга гиперболы

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \ y = a\,\mathrm{sh}\,t \ (0 \leqslant t \leqslant t_0).$$

4225. $\int\limits_C (x^{4/3} + y^{4/3})\,ds$, где C — дуга астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

4226. $\int\limits_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$, где C—выпуклый контур, ограниченный кривыми $r=a$, $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ (r и φ—полярные координаты).

4227. $\int\limits_C |y|\,ds$, где C — дуга лемнискаты

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

4228. $\int\limits_C x\,ds$, где C — часть логарифмической спирали $r=ae^{k\varphi}$ $(k>0)$, находящаяся внутри круга $r\leqslant a$.

4229. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, где C—окружность $x^2+y^2=ax$.

4230. $\int\limits_C \frac{ds}{y^2}$, где C—цепная линия $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

Найти длины дуг пространственных кривых (параметры положительны):

4231. $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$, от $O\,(0,\,0,\,0)$ до $A\,(3,\,3,\,2)$.

4232. $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$, $z=e^{-t}$, при $0<t<+\infty$.

4233. $y=a\arcsin\frac{x}{a}$, $z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ от $O(0,\,0,\,0)$ до $A\,(x_0,\,y_0,\,z_0)$.

4234. $(x-y)^2=a(x+y)$, $x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$ от $O(0,\,0,\,0)$ до $A\,(x_0,\,y_0,\,z_0)$.

4235. $x^2+y^2=cz$, $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{z}{c}$ от $O(0,\,0,\,0)$ до $A\,(x_0,\,y_0,\,z_0)$.

4236. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{ch}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=a$ от точки $A\,(a,\,0,\,0)$ до точки $B\,(x,\,y,\,z)$.

Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода, взятые вдоль пространственных кривых:

4237. $\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)\,ds$, где C — часть винтовой линии

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt\ \ (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

4238. $\int\limits_C x^2\,ds$, где C — окружность

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x+y+z=0.$$

4239. $\int\limits_C z\,ds$, где C — коническая винтовая линия

$$x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t\ (0\leqslant t\leqslant t_0).$$

4240. $\int\limits_C z\,ds$, где C — дуга кривой $x^2+y^2=z^2$, $y^2=ax$ от точки $O\,(0,\ 0,\ 0)$ до точки $A\,(a,\ a,\ a\sqrt{2})$.

4241. Найти массу кривой $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(a\geqslant b>0;\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, если линейная плотность ее в точке $(x,\ y)$ равна $\rho=|y|$.

4241.1. Найти массу дуги параболы

$$y^2=2px \qquad (0\leqslant x\leqslant p/2),$$

если линейная плотность параболы в текущей точке $M\,(x,\ y)$ равна $|y|$.

4242. Найти массу дуги кривой $x=at$, $y=\frac{a}{2}t^2$, $z=\frac{a}{3}t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, плотность которой меняется по закону $\rho=\sqrt{2y/a}$.

4243. Вычислить координаты центра тяжести дуги однородной кривой $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ от точки $A\,(0,\ a)$ до точки $B\,(b,\ h)$.

4244. Определить центр тяжести дуги циклоиды

$$x=a\,(t-\sin t),\ y=a\,(1-\cos t) \qquad (0\leqslant t\leqslant \pi).$$

4244.1. Найти статические моменты

$$S_y=\int\limits_C x\,ds,\quad S_x=\int\limits_C y\,ds$$

дуги C астроиды

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3} \qquad (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$$

относительно осей координат.

4244.2. Найти момент инерции окружности $x^2+y^2=a^2$ относительно ее диаметра.

4244.3. Найти полярные моменты инерции

$$I_0=\int\limits_C (x^2+y^2)\,ds$$

относительно точки $O(0, 0)$ следующих линий: а) контура C квадрата $\max\{|x|, |y|\} = a$; б) контура C правильного треугольника с вершинами в полярных координатах

$$P(a, 0),\ Q\left(a, \frac{2\pi}{3}\right),\ R\left(a, \frac{4\pi}{3}\right).$$

4244.4. Найти средний полярный радиус астроиды

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

т. е. число r_0 ($r_0 > 0$), определяемое формулой

$$I_0 = s \cdot r_0^2,$$

где I_0 — полярный момент инерции астроиды, относительно начала координат (см. 4244.3) и s — длина дуги астроиды.

4245. Вычислить координаты центра тяжести контура сферического треугольника $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

4246. Найти координаты центра тяжести однородной дуги

$$x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t \quad (-\infty < t \leqslant 0).$$

4247. Найти моменты инерции относительно координатных осей одного витка винтовой линии

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = \frac{h}{2\pi} t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4248. Вычислить криволинейный интеграл 2-го типа

$$\int\limits_{OA} x\,dy - y\,dx,$$

где O — начало координат и точка A имеет координаты $(1, 2)$, если: а) OA — отрезок прямой линии; б) OA — парабола, ось которой есть Oy; в) OA — ломаная линия, состоящая из отрезка OB оси Ox и отрезка BA, параллельного оси Oy.

4249. Вычислить

$$\int\limits_{OA} x\,dy + y\,dx$$

для путей а), б) и в), указанных в предыдущей задаче.

Вычислить следующие криволинейные интегралы 2-го рода, взятые вдоль указанных кривых, в направлении возрастания параметра:

4250. $\int\limits_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$, где C — парабола

$$y = x^2 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

4251. $\int\limits_C (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$, где C — кривая

$$y = 1 - |1 - x| \quad (0 \leqslant x \leqslant 2).$$

4252. $\oint\limits_C (x + y)\,dx + (x - y)\,dy$, где C — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

4253. $\int\limits_C (2a - y)\,dx + x\,dy$, где C — арка циклоиды

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$$
$$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4254. $\oint\limits_C \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2 + y^2}$, где C — окружность $x^2 + y^2 = a^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

4255. $\oint\limits_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, где $ABCDA$ — контур квадрата с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$.

4256. $\int\limits_{AB} dx \sin y + dy \sin x$, где AB — отрезок прямой между точками $A(0, \pi)$ и $B(\pi, 0)$.

4257. $\oint\limits_{OmAnO} dy \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - dx$, где OmA — отрезок параболы $y = x^2$ и OnA — отрезок прямой $y = x$.

Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить следующие криволинейные интегралы:

4258. $\int\limits_{(-1, 2)}^{(2, 3)} x\,dy + y\,dx.$ 4259. $\int\limits_{(0, 1)}^{(3, -4)} x\,dx + y\,dy.$

4260. $\int\limits_{(0,\,1)}^{(2,\,3)} (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$.

4261. $\int\limits_{(1,\,-1)}^{(1,\,1)} (x-y)\,(dx-dy)$.

4262. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(a,\,b)} f(x+y)\,(dx+dy)$, где $f(u)$ непрерывна.

4263. $\int\limits_{(2,\,1)}^{(1,\,2)} \dfrac{y\,dx-x\,dy}{x^2}$ вдоль путей, не пересекающих оси Oy.

4264. $\int\limits_{(1,\,0)}^{(6,\,8)} \dfrac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ вдоль путей, не проходящих через начало координат.

4265. $\int\limits_{(x_1,\,y_1)}^{(x_2,\,y_2)} \varphi(x)\,dx+\psi(y)\,dy$, φ и ψ — непрерывные функции.

4266. $\int\limits_{(-2,\,-1)}^{(3,\,0)} (x^4+4xy^3)\,dx+(6x^2y^2-5y^4)\,dy$.

4267. $\int\limits_{(0,\,-1)}^{(1,\,0)} \dfrac{x\,dy-y\,dx}{(x-y)^2}$ вдоль путей, не пересекающих прямой $y=x$.

4268. $\int\limits_{(1,\,\pi)}^{(2,\,\pi)} \left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}\right)dy$

вдоль путей, не пересекающих оси Oy.

4269. $\int\limits_{(0,\,0)}^{(a,\,b)} e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy)$.

4270. Доказать, что если $f(u)$ — непрерывная функция и C — кусочно гладкий замкнутый контур, то

$$\oint\limits_C f(x^2+y^2)\,(x\,dx+y\,dy)=0.$$

Найти первообразную функцию z, если:

4271. $dz=(x^2+2xy-y^2)\,dx+(x^2-2xy-y^2)\,dy$.

4272. $dz=\dfrac{y\,dx-x\,dy}{3x^2-2xy+3y^2}$.

4273. $dz=\dfrac{(x^2+2xy+5y^2)\,dx+(x^2-2xy+y^2)\,dy}{(x+y)^3}$.

4274. $dz=e^x\,[e^y(x-y+2)+y]\,dx+$
$+e^x\,[e^y\,(x-y)+1]\,dy$.

4275. $dz=\dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}\,dx+\dfrac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}\,dy$.

4276. $dz=\dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)dx-$
$-\dfrac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\dfrac{1}{r}\right)dy$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

4277. Доказать, что для криволинейного интеграла справедлива следующая оценка:

$$\left|\int\limits_C P\,dx+Q\,dy\right|\leqslant LM,$$

где L — длина пути интеграции и $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$ на дуге C.

4278. Оценить интеграл

$$I_R=\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\,dx-x\,dy}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

Доказать, что $\lim\limits_{R\to\infty}I_R=0$.

Вычислить криволинейные интегралы, взятые вдоль пространственных кривых (координатная система предполагается правой):

4279. $\int\limits_C(y^2-z^2)\,dx+2yz\,dy-x^2dz$, где C — кривая $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, пробегаемая в направлении возрастаиия параметра.

4280. $\int\limits_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$, где C —виток винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, пробегаемый в направлении возрастания параметра.

4281. $\int\limits_C(y-z)\,dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, где C — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x\operatorname{tg}\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительных x.

4282. $\int\limits_C y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz$, где C — часть кривой Вивиани $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$ ($z \geqslant 0$, $a > 0$), пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительной части ($x > a$) оси Ox.

4283. $\int\limits_C (y^2 - z^2)\, dx + (z^2 - x^2)\, dy + (x^2 - y^2)\, dz$, где C — контур, ограничивающий часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, пробегаемый так, что внешняя сторона этой поверхности остается слева.

Найти следующие криволинейные интегралы от полных дифференциалов:

4284. $\int\limits_{(1,\,1,\,1)}^{(2,\,3,\,-4)} x\,dx + y^2 dy - z^3 dz$.

4285. $\int\limits_{(1,\,2,\,3)}^{(6,\,1,\,1)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$.

4286. $\int\limits_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где точка (x_1, y_1, z_1) расположена на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, а точка (x_2, y_2, z_2) — на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ ($a > 0$, $b > 0$).

4287. $\int\limits_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} \varphi(x)\, dx + \psi(y)\, dy + \chi(z)\, dz$, где φ, ψ, χ — непрерывные функции.

4288. $\int\limits_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} f(x + y + z)\,(dx + dy + dz)$, где f — непрерывная функция.

4289. $\int\limits_{(x_1,\,y_1,\,z_1)}^{(x_2,\,y_2,\,z_2)} f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$, где f — непрерывная функция.

Найти первообразную функцию u, если:

4290. $du = (x^2 - 2yz)\, dx + (y^2 - 2xz)\, dy + (z^2 - 2xy)\, dz$.

4291. $du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2}\, dz$.

4292. $du = \frac{(x + y - z)\, dx + (x + y - z)\, dy + (x + y + z)\, dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}$.

4293. Найти работу, производимую силой тяжести, когда точка массы m перемещается из положения (x_1, y_1, z_1) в положение (x_2, y_2, z_2) (ось Oz направлена вертикально вверх).

4294. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению материальной точки о начала координат, если эта точка описывает в направлении, противоположном ходу часовой стрелки, положительную четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

4295. Найти работу силы тяготения $F=k/r^2$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, действующей на единичную массу, когда последняя перемещается и точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

§ 12. Формула Грина

1°. Связь криволинейного интеграла с двойным. Если C — замкнутый простой кусочно гладкий контур, ограничивающий конечную односвязную область S, пробегаемый так, что область S остается слева, и функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка $P'_y(x, y)$ и $Q'_x(x, y)$ в области S и на ее границе, то имеет место *формула Грина*

$$\oint_C P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy. \quad (1)$$

Формула (1) справедлива также и для конечной области S, ограниченной несколькими простыми контурами, если под границей C последней понимать сумму всех граничных контуров, направление обхода которых выбирается так, что область S остается слева.

2°. Площадь плоской области. Площадь S фигуры, ограниченной простым кусочно гладким контуром C, равна

$$S=\oint_C x\,dy=-\oint_C y\,dx=\frac{1}{2}\oint_C (x\,dy-y\,dx).$$

В этом параграфе, если не оговорено противное, предполагается, что замкнутый контур интеграции простой (без точек самопересечения) и пробегается так, что ограниченная им область, не содержащая бесконечно удаленной точки, остается слева (положительное направление).

4296. С помощью формулы Грина преобразовать криволинейный интеграл

$$I=\oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy,$$

где контур C ограничивает конечную область S.

4297. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$$I=\oint\limits_K (x+y)^2\,dx-(x^2+y^2)\,dy,$$

где K — пробегаемый в положительном направлении контур треугольника ABC с вершинами A (1, 1), B (3, 2), C (2, 5).

Проверить найденный результат, вычисляя интеграл непосредственно.

Применяя формулу Грина, вычислить следующие криволинейные интегралы:

4298. $\oint\limits_C xy^2dy-x^2y\,dx$, где C — окружность

$$x^2+y^2=a^2.$$

4299. $\oint\limits_C (x+y)\,dx-(x-y)\,dy$, где C — эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

4300. $\oint\limits_C e^x[(1-\cos y)\,dx-(y-\sin y)\,dy]$, где C — пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $0<x<\pi$, $0<y<\sin x$.

4301. $\oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy)$.

4302. На сколько отличаются друг от друга криволинейные интегралы

$$I_1=\int\limits_{AmB}(x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy$$

и

$$I_2=\int\limits_{AnB}(x+y)^2\,dx-(x-y)^2\,dy,$$

где AmB — прямая, соединяющая точки A (1, 1) и B (2, 6), и AnB — парабола с вертикальной осью, проходящая через те же точки A и B и начало координат?

4303. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AmO}(e^x\sin y-my)\,dx+(e^x\cos y-m)\,dy,$$

где AmO — верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = ax$, пробегаемая от точки $A\ (a,\ 0)$ до точки $O\ (0,\ 0)$.

Указание. Дополнить путь AmO до замкнутого прямолинейным отрезком OA оси Ox.

4304. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AmB} [\varphi(y)\, e^x - my]\, dx + [\varphi'(y)\, e^x - m]\, dy,$$

где $\varphi(y)$ и $\varphi'(y)$ — непрерывные функции и AmB — произвольный путь, соединяющий точки $A\ (x_1,\ y_1)$ и $B\ (x_2,\ y_2)$, но ограничивающий вместе с отрезком AB площадь $AmBA$ данной величины S.

4305. Определить две дважды непрерывно дифференцируемые функции $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ так, чтобы криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_C P(x+a,\ y+\beta)\, dx + Q(x+\alpha,\ y+\beta)\, dy$$

для любого замкнутого контура C не зависел от постоянных α и β.

4306. Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $F(x,\ y)$, чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AmB} F(x,\ y)\,(y\, dx + x\, dy)$$

не зависел от вида пути интегрирования?

4307. Вычислить

$$I = \oint\limits_C \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2},$$

где C — простой замкнутый контур, не проходящий через начало координат, пробегаемый в положительном направлении.

Указание. Рассмотреть два случая: 1) начало координат находится вне контура; 2) контур C окружает начало координат.

С помощью криволинейных интегралов вычислить площади, ограниченные следующими кривыми:

4308. Эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

4309. Астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

4310. Параболой $(x + y)^2 = ax$ $(a > 0)$ и осью Ox.

4311. Петлей декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$.

Указание. Положить $y = tx$.

4312. Лемнискатой $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$.

Указание. Положить $y = x \operatorname{tg} \varphi$.

4313. Кривой $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ и осями координат.

4314. Вычислить площадь, ограниченную кривой

$$(x + y)^{n+m+1} = ax^n y^m \quad (a > 0,\ n > 0,\ m > 0).$$

4315. Вычислить площадь, ограниченную кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad (a>0,\ b>0,\ n>0)$$

и осями координат.

Указание. Положить $\frac{x}{a} = \cos^{2/n} \varphi$, $\frac{y}{b} = \sin^{2/n} \varphi$.

4316. Вычислить площадь, ограниченную кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$$

$(a > 0,\ b > 0,\ n > 1)$ и осями координат.

4317. Вычислить площадь петли кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c\left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n$$

$$(a>0,\ b>0,\ c>0,\ n>0).$$

4318. *Эпициклоидой* называется кривая, описываемая точкой подвижной окружности радиуса r, катящейся без скольжения по неподвижной окружности радиуса R и остающейся вне нее.

Найти площадь, ограниченную эпициклоидой, предполагая, что отношение $\frac{R}{r} = n$ есть целое число $(n \geqslant 1)$.

Разобрать частный случай $r = R$ (кардиоида).

4319. *Гипоциклоидой* называется кривая, описываемая точкой подвижной окружности радиуса r, катящейся без скольжения по неподвижной окружности радиуса R и остающейся внутри нее. Найти площадь, ограниченную гипоциклоидой, предполагая, что отношение $R/r = n$ есть целое число $(n \geqslant 2)$.

Разобрать частный случай $r = R/4$ (астроида).

4320. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности $x^2+y^2=ax$, вырезанной поверхностью $x^2+y^2+z^2=a^2$.

4320.1. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox простого замкнутого контура C, расположенного в верхней полуплоскости $y \geqslant 0$ равен

$$V=-\pi \oint_C y^2 dx.$$

4321. Вычислить

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{X\,dY-Y\,dX}{X^2+Y^2},$$

если $X=ax+by$, $Y=cx+dy$ и простой замкнутый контур C окружает начало координат $(ad-bc\neq 0)$.

4322. Вычислить интеграл I (см. предыдущую задачу), если $X=\varphi(x, y)$, $Y=\psi(x, y)$, и простой контур C окружает начало координат, причем кривые $\varphi(x, y)=0$ и $\psi(x, y)=0$ имеют несколько простых точек пересечения внутри контура C.

4323. Показать, что если C — замкнутый контур и l — произвольное направление, то

$$\oint_C \cos(l,\ n)\,ds=0,$$

где n — внешняя нормаль к контуру C.

4324. Найти значение интеграла

$$I=\oint_C [x\cos(n,\ x)+y\cos(n,\ y)]\,ds,$$

где C — простая замкнутая кривая, ограничивающая конечную область S, и n — внешняя нормаль к ней.

4325. Найти

$$\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{S}\oint_C (F\cdot n)\,ds,$$

где S — площадь, ограниченная контуром C, окружающим точку $(x_0,\ y_0)$, $d(S)$ — диаметр области S, n — единичный вектор внешней нормали контура C и $F\{X,\ Y\}$ — вектор, непрерывно дифференцируемый в $S+C$.

§ 13. Физические приложения криволинейных интегралов

4326. С какой силой притягивает масса M, равномерно распределенная по верхней полуокружности $x^2+y^2=a^2$, $y\geqslant 0$, материальную точку массы m, занимающую положение $(0,\ 0)$?

4327. Вычислить *логарифмический интеграл простого слоя*

$$u(x, y) = \oint\limits_C \varkappa \ln \frac{1}{r}\, ds,$$

где $\varkappa = \text{const}$ — плотность, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ и контур C есть окружность $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

4328. Вычислить в полярных координатах ρ и φ логарифмические потенциалы простого слоя

$$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} \cos m\psi \ln \frac{1}{r}\, d\psi \quad \text{и} \quad I_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sin m\psi \ln \frac{1}{r}\, d\psi,$$

где r — расстояние между точкой (ρ, φ) и переменной точкой $(1, \psi)$ и m — натуральное число.

4329. Вычислить *интеграл Гаусса*

$$u(x, y) = \oint\limits_C \frac{\cos(r, n)}{r}\, ds,$$

где $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ — длина вектора $\boldsymbol{r}$, соединяющего точку A (x, y) с переменной точкой M (ξ, η) простого замкнутого гладкого контура C, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$ — угол между вектором $\boldsymbol{r}$ и внешней нормалью $\boldsymbol{n}$ к кривой C в точке ее M.

4330. Вычислить в полярных координатах ρ и φ логарифмические потенциалы двойного слоя

$$K_1 = \int\limits_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}\, d\psi,$$

$$K_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}\, d\psi,$$

где r — расстояние между точкой A (ρ, φ) и переменной точкой M $(1, \psi)$, $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$ — угол между направлением $AM = \boldsymbol{r}$ и радиусом $OM = \boldsymbol{n}$, проведенным из точки O $(0, 0)$, и m — натуральное число.

4331. Дважды дифференцируемая функция $u = u(x, y)$ называется *гармонической*, если $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Доказать, что u есть гармоническая функция тогда и только тогда, если

$$\oint\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = 0,$$

где C — произвольный замкнутый контур и $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к этому контуру.

4332. Доказать, что

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_S u\,\Delta u\,dx\,dy + \oint\limits_C u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds,$$

где гладкий контур C ограничивает конечную область S.

4333. Доказать, что функция, гармоническая внутри конечной области S и на ее границе C, однозначно определяется своими значениями на контуре C (см. задачу 4332).

4334. Доказать *вторую формулу Грина* на плоскости

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\,dy = \oint\limits_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

где гладкий контур C ограничивает конечную область S и $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к C.

4335. Пользуясь второй формулой Грина, доказать, что если $u = u(x, y)$ — гармоническая функция в замкнутой конечной области S, то

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_C \left(u\,\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r\,\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds,$$

где C — граница области S, n — направление внешней нормали к контуру C, (x, y) — внутренняя точка области S и $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ — расстояние между точкой (x, y) и переменной точкой (ξ, η) контура C.

Указание. Вырезать точку (x, y) из области S вместе с бесконечно малой круговой окрестностью ее и применить вторую формулу Грина к оставшейся части области S.

4336. Доказать *теорему о среднем* для гармонической функции $u(M) = u(x, y)$:

$$u(M) = \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_C u(\xi, \eta)\, ds,$$

где C — окружность радиуса R с центром в точке M.

4337. Доказать, что функция $u(x, y)$, гармоническая в ограниченной и замкнутой области и не являющаяся постоянной в этой области, не может достигать своих наибольшего и наименьшего значений во внутренней точке этой области (*принцип максимума*).

4338. Доказать *формулу Римана*

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy = \oint\limits_C P\, dx + Q\, dy,$$

где

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

$$M[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - a \frac{\partial v}{\partial x} - b \frac{\partial v}{\partial y} + cv$$

(a, b, c — постоянные), P и Q — некоторые определенные функции и контур C ограничивает конечную область S.

4339. Пусть $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ — компоненты скорости установившегося потока жидкости. Определить количество жидкости, вытекшее за единицу времени из ограниченной контуром C области S (т. е. разность между количествами вышедшей и вошедшей жидкости). Какому уравнению удовлетворяют функции u и v, если жидкость несжимаема и в области S отсутствуют источники и стоки?

4340. Согласно закону Био — Савара электрический ток i, протекающий по элементу проводника ds, создает в точке пространства $M(x, y, z)$ магнитное поле с напряжением

$$d\boldsymbol{H} = ki \frac{(\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{s})}{r^3},$$

где $\boldsymbol{r}$ — вектор, соединяющий элемент ds с точкой M, и k — коэффициент пропорциональности. Найти проекции H_x, H_y, H_z напряжения магнитного поля $\boldsymbol{H}$ в точке M для случая замкнутого проводника C.

§ 14. Поверхностные интегралы

1°. Поверхностный интеграл 1-го рода. Если S — кусочно гладкая двусторонняя поверхность

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \qquad ((u, v) \in \Omega) \quad (1)$$

и $f(x, y, z)$ — функция, определенная и непрерывная в точках поверхности S, то

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_\Omega f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \qquad (2)$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

В частном случае, если уравнение поверхности S имеет вид

$$z = z(x, y) \qquad ((x, y) \in \sigma),$$

где $z(x, y)$ — однозначная непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,dS =$$

$$= \iint\limits_\sigma f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Этот интеграл не зависит от выбора стороны поверхности S.

Если функцию $f(x, y, z)$ рассматривать как плотность поверхности S в точке (x, y, z), то интеграл (2) представляет собой массу этой поверхности.

2°. Поверхностный интеграл 2-го рода. Если S — гладкая двусторонняя поверхность, $S+$ — ее сторона, характеризуемая направлением нормали h $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — три функции, определенные и непрерывные на поверхности S, то

$$\iint\limits_{S+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS. \quad (3)$$

Если поверхность S задана в параметрическом виде (1), то направляющие косинусы нормали n определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где $A = \dfrac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$, $B = \dfrac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$, $C = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, и знак перед радикалом выбирается надлежащим образом.

При переходе к другой стороне S^- поверхности S интеграл (3) меняет свой знак на обратный.

4341. На сколько отличаются друг от друга поверхностные интегралы

$$I_1 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS \quad \text{и} \quad I_2 = \iint_P (x^2 + y^2 + z^2)\, dP,$$

где S — поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и P поверхность октаэдра $|x| + |y| + |z| = a$, вписанного в эту сферу?

4342. Вычислить $\iint_S z\, dS$, где S — часть поверхности $x^2 + z^2 = 2az$ $(a > 0)$, вырезанная поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Вычислить следующие поверхностные интегралы 1-го рода:

4343. $\iint_S (x + y + z)\, dS$, где S — поверхность

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geqslant 0.$$

4344. $\iint_S (x^2 + y^2)\, dS$, где S — граница тела

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1.$$

4345. $\displaystyle\iint_S \frac{dS}{(1 + x + y)^2}$, где S — граница тетраэдра

$$x + y + z \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0.$$

4346. $\iint_S |xyz|\, dS$, где S — часть поверхности $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 1$.

4347. $\displaystyle\iint_S \frac{dS}{h}$, где S — поверхность эллипсоида и h — расстояние центра эллипсоида до плоскости, касательной к элементу dS поверхности эллипсоида.

4348. $\iint_S z\, dS$, где S — часть поверхности геликоида

$$x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = v\ (0 < u < a;\ 0 < v < 2\pi).$$

4349. $\iint_S z^2\, dS$, где S — часть поверхности конуса

$$x = r \cos\varphi \sin\alpha,\ y = r \sin\varphi \sin\alpha,\ z = r \cos\alpha$$

$(0 \leqslant r \leqslant a;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ и α — постоянная $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

4350. $\iint\limits_S (xy + yz + zx)\,dS$, где S — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанная поверхностью

$$x^2 + y^2 = 2ax.$$

4351. Доказать *формулу Пуассона*

$$\iint\limits_S f(ax + by + cz)\,dS = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right) du,$$

где S есть поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4352. Найти массу параболической оболочки

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (0 \leqslant z \leqslant 1),$$

плотность которой меняется по закону $\rho = z$.

4352.1. Найти массу полусферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z \geqslant 0),$$

плотность которой в каждой ее точке $M(x, y, z)$ равна z/a.

4352.2. Найти статические моменты однородной треугольной пластинки $x + y + z = a$ $(x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0)$ относительно координатных плоскостей.

4353. Вычислить момент инерции относительно оси Oz однородной сферической оболочки $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(z \geqslant 0)$ плотности ρ_0.

4354. Вычислить момент инерции однородной конической оболочки $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ $(0 \leqslant z \leqslant b)$ плотности ρ_0 относительно прямой

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z - b}{0}.$$

4355. Найти координаты центра тяжести части однородной поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанной поверхностью $x^2 + y^2 = ax$.

4356. Найти координаты центра тяжести однородной поверхности

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad (x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;\ x + y \leqslant a).$$

4356.1. Найти полярные моменты инерции

$$I_0 = \iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS$$

следующих поверхностей S:

а) поверхности куба $\max\{|x|, |y|, |z|\} = a$;

б) полной поверхности цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant R^2$; $0 \leqslant \leqslant z \leqslant H$.

4356.2. Найти моменты инерции треугольной пластинки

$$x + y + z = 1 \quad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$$

относительно координатных плоскостей.

4357. С какой силой притягивает однородная усеченная коническая поверхность

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = r$$
$$(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 < b \leqslant r \leqslant a)$$

плотности ρ_0 материальную точку массы m, помещенную в вершине этой поверхности?

4358. Найти потенциал однородной сферической поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (S) плотности ρ_0 на точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, т. е. вычислить интеграл $u = \iint\limits_S \frac{\rho_0\,dS}{r}$,

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$.

4359. Вычислить

$$F(t) = \iint\limits_{x+y+z=t} f(x, y, z)\,dS,$$

где

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & \text{если } x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1; \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 + z^2 > 1. \end{cases}$$

Построить график функции $u = F(t)$.

4360. Вычислить интеграл

$$F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z)\,dS,$$

где

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{если } z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}; \\ 0, & \text{если } z < \sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

4361. Вычислить интеграл

$$F(x, y, z, t) = \iint\limits_S f(\xi, \eta, \zeta)\,dS,$$

где S — переменная сфера

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2,$$

и

$$f(\xi, \eta, \zeta)=\begin{cases}1, & \text{если } \xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2;\\ 0, & \text{если } \xi^2+\eta^2+\zeta^2\geqslant a^2,\end{cases}$$

предполагая, что

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>a>0.$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы 2-го рода:

4362. $\iint\limits_S (x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy)$, где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

4363. $\iint\limits_S f(x)\,dy\,dz+g(y)\,dz\,dx+h(z)\,dx\,dy$, где $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ — непрерывные функции и S — внешняя сторона поверхности параллелепипеда $0\leqslant x\leqslant a$; $0\leqslant y\leqslant b$; $0\leqslant z\leqslant c$.

4364. $\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dz\,dx+(x-y)\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона конической поверхности $x^2+y^2=z^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$.

4365. $\iint\limits_S \left(\frac{dy\,dz}{x}+\frac{dz\,dx}{y}+\frac{dx\,dy}{z}\right)$, где S — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4366. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

§ 15. Формула Стокса

Если $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ — непрерывно дифференцируемые функции и C — простой замкнутый кусочно гладкий контур, ограничивающий конечную кусочно гладкую двустороннюю поверхность S, то имеет место *формула Стокса*:

$$\oint\limits_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_S \begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} dS,$$

где $\cos\alpha$ $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S, направленной в ту сторону, относительно которой обход контура C совершается против хода часовой стрелки (для правой координатной системы).

4367. Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$,* где C — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Проверить результат непосредственным вычислением.

4368. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{AmB} (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy + (z^2 - xy)\,dz,$$

взятый по отрезку винтовой линии

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = \frac{h}{2\pi}\varphi$$

от точки $A\ (a,\ 0,\ 0)$ до точки $B\ (a,\ 0,\ h)$.

Указание. Дополнить кривую AmB прямолинейным отрезком и применить формулу Стокса.

4369. Пусть C — замкнутый контур, расположенный в плоскости $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали плоскости) и ограничивающий площадку S.

Найти

$$\oint\limits_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

где контур C пробегается в положительном направлении.

Применяя формулу Стокса, вычислить интегралы:

4370. $\int\limits_C (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz$, где C — эллипс $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cos t$, $z = a\cos^2 t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$, пробегаемый в направлении возрастания параметра t.

4371. $\int\limits_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, где C — эллипс $x^2 + y^2 = a^2 \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ $(a > 0,\ h > 0)$, пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

4372. $\int\limits_C (y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$, где C — кривая $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$ $(0 < r < R,\ z > 0)$, пробегаемая так, что ограниченная ею на внешней стороне сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ наименьшая область остается слева.

4373. $\int\limits_C (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, где C — сечение поверхности куба $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$ плоскостью $x + y + z = \frac{3}{2}a$, пробегаемое против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

4374. $\int\limits_C y^2z^2dx + x^2z^2dy + x^2y^2dz$, где C — замкнутая кривая $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

4375. Доказать, что функция

$$W(x, y, z) = ki\iint\limits_S \frac{\cos(r, n)}{r^2}\,dS \quad (k = \text{const}),$$

где S — площадка, ограниченная контуром C, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности S и $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, соединяющий точку пространства $M(x, y, z)$ с текущей точкой $A(\zeta, \eta\zeta)$ контура C, является потенциалом магнитного поля H, создаваемого током i, протекающим по контуру C (см. задачу 4340).

§ 16. Формула Остроградского

Если S — кусочно гладкая поверхность, ограничивающая объем V, и $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — функции, непрерывные вместе со своими частными производными 1-го порядка в области $V + S$, то справедлива *формула Остроградского*:

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Применяя формулу Остроградского, преобразовать следующие поверхностные интегралы, если гладкая поверхность S ограничивает конечный объем V и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S:

4376. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$.

4377. $\iint\limits_S yz\,dy\,dz + zx\,dz\,dx + xy\,dx\,dy.$

4378. $\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS.$

4379. $\iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS.$

4380. $\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \right.$
$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS.$

4381. Доказать, что если S — замкнутая простая поверхность и $\boldsymbol{l}$ — любое постоянное направление, то

$$\iint\limits_S \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l})\,dS = 0,$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S.

4382. Доказать, что объем тела, ограниченного поверхностью S, равен

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

4383. Доказать, что объем конуса, ограниченного гладкой конической поверхностью $F(x, y, z) = 0$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$, равен

$$V = \frac{1}{3}SH,$$

где S — площадь основания конуса, расположенного в данной плоскости, и H — его высота.

4384. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z = \pm c$ и

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos u\cos v + b\sin u\sin v,\\ y &= a\cos u\sin v - b\sin u\cos v,\\ z &= c\sin u. \end{aligned}\right\}$$

4385. Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = -u + a\cos v$$
$$(u \geqslant 0)$$

и плоскостями: $x = 0$ и $z = 0$ $(a > 0)$.

4385.1. Найти объем тела, ограниченного тором

$$\left.\begin{aligned} x &= (b+a\cos\psi)\cos\varphi, \\ y &= (b+a\cos\psi)\sin\varphi, \\ z &= a\sin\psi \end{aligned}\right\} \quad (0<a\leqslant b).$$

4386. Доказать формулу

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x,\ y,\ z,\ t)\,dx\,dy\,dz\right\} = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,\ y,\ z,\ t)\,dS + \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} \frac{\partial f}{\partial t}\,dx\,dy\,dz$$

$$(t>0).$$

С помощью формулы Остроградского вычислить следующие поверхностные интегралы:

4387. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона границы куба $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$.

4388. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

4389. $\iint\limits_S (x-y+z)\,dy\,dz + (y-z+x)\,dz\,dx + (z-x+y)\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона поверхности

$$|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1.$$

4390. Вычислить $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS$, где S — часть конической поверхности $x^2+y^2=z^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$ и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к этой поверхности.

Указание. Присоединить часть плоскости $z=h$, $x^2+y^2\leqslant h^2$.

4391. Доказать формулу

$$\iiint\limits_V \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r} = \frac{1}{2}\iint\limits_S \cos(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})\,dS,$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S в текущей точке ее $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$

и r — радиус-вектор, идущий от точки (x, y, z) к точке (ξ, η, ζ).

4392. Вычислить *интеграл Гаусса*

$$I(x, y, z) = \iint\limits_S \frac{\cos(r, n)}{r^2}\, dS,$$

где S — простая замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая объем V, n — внешняя нормаль к поверхности S в точке ее (ξ, η, ζ), r — радиус-вектор, соединяющий точку (x, y, z) с точкой (ξ, η, ζ) и $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$.

Рассмотреть два случая:

а) когда поверхность S не окружает точку (x, y, z),

б) когда поверхность S окружает точку (x, y, z).

4393. Доказать, что если

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

и S — гладкая поверхность, ограничивающая конечное тело V, то справедливы следующие формулы:

а) $$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iiint\limits_V \Delta u\, dx\, dy\, dz;$$

б) $$\iint\limits_S u \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz + \iiint\limits_V u\, \Delta u\, dx\, dy\, dz,$$

где u — функция, непрерывная вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в области $V + S$, и $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к поверхности S.

4394. Доказать *вторую формулу Грина* в пространстве

$$\iiint\limits_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy\, dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

где объем V ограничен поверхностью S, n — направление внешней нормали к поверхности S и функции

$u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ дважды дифференцируемы в области $V + S$.

4395. Функция $u = u(x, y, z)$, обладающая непрерывными производными до второго порядка включительно в некоторой области, называется *гармонической* в этой области, если

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Доказать, что если u — гармоническая функция в конечной замкнутой области V, ограниченной гладкой поверхностью S, то справедливы формулы:

а) $\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0;$

б) $\iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz =$

$$= \iint\limits_S u \frac{\partial u}{\partial n}\, dS,$$

где n — внешняя нормаль к поверхности S.

Пользуясь формулой б), доказать, что функция, гармоническая в области V, однозначно определяется своими значениями на ее границе S.

4396. Доказать, что если функция $u = u(x, y, z)$ — гармоническая в конечной замкнутой области V, ограниченной гладкой поверхностью S, то

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left[u \frac{\cos(r, n)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n}\right] dS,$$

где r — радиус-вектор, идущий из внутренней точки (x, y, z) области V в переменную точку (ξ, η, ζ) поверхности S, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$, n — вектор внешней нормали к поверхности S в точке (ξ, η, ζ).

4397. Доказать, что если $u = u(x, y, z)$ — функция, гармоническая внутри сферы S радиуса R с центром в (x_0, y_0, z_0), то $u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_S u(x, y, z)\, dS$ (*теорема о среднем*).

4398. Доказать, что функция $u = u(x, y, z)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области V и гармоническая внутри нее, не может достигать своих наибольшего и наименьшего значений во внутренней точке области, если эта функция не является тождественной постоянной (*принцип максимума*).

4399. Тело V целиком погружено в жидкость. Исходя из закона Паскаля, доказать, что выталкивающая сила жидкости равна весу жидкости в объеме тела и направлена вертикально вверх (*закон Архимеда*).

4400. Пусть S_t — переменная сфера $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$ и функция $f(\xi, \eta, \zeta)$ — непрерывна. Доказать, что функция

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t}\, dS_t$$

удовлетворяет *волновому уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

и начальным условиям: $u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f(x, y, z).$

Указание. Производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ выразить тройным интегралом.

§ 17. Элементы теории поля

1°. Градиент. Если $u(\boldsymbol{r}) = u(x, y, z)$, где $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, есть непрерывно дифференцируемое скалярное поле, то *градиентом* его называется вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

или, короче, $\operatorname{grad} u = \nabla u$, где $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$. Градиент поля u в данной точке (x, y, z) направлен по нормали к *поверхности уровня* $u(x, y, z) = C$, проходящей через эту точку. Этот вектор для каждой точки поля по величине

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

и направлению дает наибольшую скорость изменения функции u. Производная поля u в некотором направлении $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ равна:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \boldsymbol{l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2°. Дивергенция поля и ротация (вихрь) поля. Если

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = a_x(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + a_y(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + a_z(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$$

есть непрерывно дифференцируемое *векторное поле*, то скаляр

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} \equiv \nabla \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

называется *дивергенцией* или *расходимостью* этого поля.

Вектор

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

носит название *ротации* или *вихря поля*.

3°. Поток вектора через поверхность. Если вектор $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ порождает векторное поле в области Ω, то *потоком вектора через данную поверхность* S, расположенную в Ω, в указанную сторону, характеризуемую единичным вектором нормали $\boldsymbol{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, называется интеграл

$$\iint\limits_S a_n dS = \iint\limits_S (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\, dS,$$

где $a_n = \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}$ — нормальная проекция вектора. *Формула Остроградского* в векторной трактовке принимает вид $\iint\limits_S a_n dS = \iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dx\, dy\, dz$, где S есть поверхность, ограничивающая объем V, и $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S.

4°. Циркуляция вектора. *Линейным интегралом* от вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, взятым по некоторой кривой C (*работа поля*), называется число

$$\int\limits_C \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \int\limits_C a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Если контур C замкнут, то линейный интеграл называется *циркуляцией вектора* $\boldsymbol{a}$ вдоль контура C.

В векторной форме *формула Стокса* имеет вид $\oint\limits_C \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint\limits_S (\operatorname{rot} \boldsymbol{a})_n\, dS$, где C — замкнутый контур, ограничивающий поверхность S, причем направление нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности S должно быть выбрано так, чтобы для наблюдателя, стоящего на поверхности S, головой по направлению нормали, обход контура C совершался против хода часовой стрелки (для правой системы координат).

5°. Потенциальное поле. Векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, являющееся градиентом некоторого скаляра u:

$$\operatorname{grad} u = \boldsymbol{a},$$

называется *потенциальным*, а величина u называется *потенциалом* поля.

Если потенциал u — однозначная функция, то

$$\int\limits_{AB} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = u(B) - u(A).$$

В частности, в этом случае циркуляция вектора $\boldsymbol{a}$ равна нулю.

Необходимым и достаточным условием потенциальности поля $\boldsymbol{a}$, заданного в поверхностно односвязной области, является выполнение условия $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$, т. е. такое поле должно быть безвихревым.

4401. Найти величину и направление градиента поля $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ в точках: а) $O(0, 0, 0)$; б) $A(1, 1, 1)$ и в) $B(2, 0, 1)$. В какой точке градиент поля равен нулю?

4401.1. Пусть $u = xy - z^2$. Найти величину и направление $\operatorname{grad} u$ в точке $M(-9, 12, 10)$.

Чему равна производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ в направлении биссектрисы координатного угла xOy?

4402. В каких точках пространства $Oxyz$ градиент поля

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

а) перпендикулярен к оси Oz; б) параллелен оси Oz; в) равен нулю?

4403. Дано скалярное поле

$$u = \ln \frac{1}{r},$$

где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. В каких точках пространства $Oxyz$ имеет место равенство $|\operatorname{grad} u| = 1$?

4404. Построить поверхности уровня скалярного поля

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}.$$

Найти поверхность уровня, проходящую через точку $M(9, 12, 28)$. Чему равен $\max u$ в области $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 36$?

4405. Найти угол φ между градиентами поля

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

в точках $A(1, 2, 2)$ и $B(-3, 1, 0)$.

4406. Пусть дано скалярное поле $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Построить поверхности уровня и поверхности равного модуля градиента поля.

Найти $\inf u$, $\sup u$, $\inf|\operatorname{grad} u|$, $\sup|\operatorname{grad} u|$ в области $1 < z < 2$.

4407. С точностью до бесконечно малых высших порядков найти расстояние в точке $M_0(x_0, y, z_0)$ между двумя бесконечно близкими поверхностями уровня

$$u(x, y, z) = c \text{ и } u(x, y, z) = c + \Delta c,$$

где $u(x_0, y_0, z_0) = c$ $(\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0) \neq 0)$.

4408. Доказать формулы:

а) $\operatorname{grad}(u + c) = \operatorname{grad} u$ (c — постоянно);
б) $\operatorname{grad} cu = c \operatorname{grad} u$ (c — постоянно);
в) $\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$;
г) $\operatorname{grad} uv = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$;
д) $\operatorname{grad}(u^2) = 2u \operatorname{grad} u$;
е) $\operatorname{grad} f'(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$.

4409. Вычислить: а) $\operatorname{grad} \boldsymbol{r}$; б) $\operatorname{grad} \boldsymbol{r}^2$; в) $\operatorname{grad} \frac{1}{\boldsymbol{r}}$, где $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

4410. Найти $\operatorname{grad} f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4411. Найти $\operatorname{grad}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор и $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор из начала координат.

4412. Найти $\operatorname{grad}\{|\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}|^2\}$ ($\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор).

4413. Доказать формулу $\operatorname{grad} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v$.

4414. Доказать формулу $\nabla^2(uv) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\nabla u \nabla v$, где

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\nabla^2 = \nabla\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

4415. Доказать, что если функция $u = u(x, y, z)$ дифференцируема в выпуклой области Ω и $|\operatorname{grad} u| \leqslant M$, где M — постоянная, то для любых точек A, B из Ω имеем:

$$|u(A) - u(B)| \leqslant M\rho(A, B),$$

где $\rho(A, B)$ — расстояние между точками A и B.

4415.1. Для функции $u = u(x, y, z)$ выразить $\operatorname{grad} u$: а) в цилиндрических координатах; б) в сферических координатах.

4416. Найти производную поля $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в данной точке $M(x, y, z)$ в направлении радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ этой точки.

В каком случае эта производная будет равна величине градиента?

4417. Найти производную поля $u = 1/r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, в направлении $l\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

В каком случае эта производная равна нулю?

4418. Найти производную поля $u = u(x, y, z)$ в направлении градиента поля $v = v(x, y, z)$.

В каком случае эта производная будет равна нулю?

4419. Написать в ортах векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \times \operatorname{grad} u$, если

$$u = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ и } \boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

4420. Определить силовые линии векторного поля

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}.$$

4421. Доказать непосредственным вычислением, что дивергенция вектора $\boldsymbol{a}$ не зависит от выбора прямоугольной координатной системы.

4422. Доказать, что $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \lim\limits_{d(S)\to 0} \frac{1}{V} \iint\limits_S a_n\, dS$, где S — замкнутая поверхность, окружающая точку M и ограничивающая объем V, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S, $d(S)$ — диаметр поверхности S.

4422.1. Найти дивергенцию поля $\boldsymbol{a} = \frac{-\boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $M(3, 4, 5)$. Чему приближенно равен поток Π вектора $\boldsymbol{a}$ через бесконечно малую сферу $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = \varepsilon^2$?

4423. Найти

$$\operatorname{div} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}.$$

4424. Доказать, что а) $\operatorname{div}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \operatorname{div} \boldsymbol{b}$; б) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \operatorname{grad} u$ ($\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор, u — скаляр); в) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) = u \operatorname{div} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \operatorname{grad} u$.

4425. Найти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

4426. Найти $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. В каком случае $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = 0$?

4427. Вычислить: а) $\operatorname{div} \boldsymbol{r}$; б) $\operatorname{div} \boldsymbol{r}/r$.

4428. Вычислить $\operatorname{div}[f(r)\,\boldsymbol{c}]$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

4429. Найти $\operatorname{div}[f(r)\,\boldsymbol{r}]$. В каком случае дивергенция этого вектора равна нулю?

4430. Найти: а) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$; б) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$.

4431. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси Oz против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω. Найти дивергенцию вектора скорости $\boldsymbol{v}$ и вектора ускорения w в точке $M(x, y, z)$ пространства в данный момент времени.

4432. Найти дивергенцию гравитационного силового поля, создаваемого конечной системой притягивающих центров.

4433. Найти выражение дивергенции плоского вектора $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(r, \varphi)$ в полярных координатах r и φ.

4434. Выразить $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(x, y, z)$ в ортогональных криволинейных координатах u, v, w, если $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$. Как частный случай получить выражение $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ в цилиндрических и сферических координатах.

Указание. Рассмотреть поток вектора $\boldsymbol{a}$ через бесконечно малый параллелепипед, ограниченный поверхностями $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$.

4435. Доказать, что: а) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \operatorname{rot}\boldsymbol{a} + \operatorname{rot}\boldsymbol{b}$; б) $\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a}) = u \operatorname{rot}\boldsymbol{a} + \operatorname{grad}(u \times \boldsymbol{a})$.

4436. Найти: а) $\operatorname{rot}\boldsymbol{r}$; б) $\operatorname{rot}[f(r)\,\boldsymbol{r}]$.

4436.1. Найти величину и направление $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ в точке $M(1, 2, -2)$, если $\boldsymbol{a} = \frac{y}{z}\boldsymbol{i} + \frac{z}{x}\boldsymbol{j} + \frac{x}{y}\boldsymbol{k}$.

4437. Найти: а) $\operatorname{rot} \boldsymbol{c} f(r)$; б) $\operatorname{rot}[\boldsymbol{c} \times f(r)\,\boldsymbol{r}]$ ($\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор).

4438. Доказать, что $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$.

4439. Найти: а) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$; б) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})$.

4440. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси $\boldsymbol{l}\,\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ с постоянной угловой скоростью ω. Найти ротацию вектора линейной скорости $\boldsymbol{v}$ в точке пространства $M(x, y, z)$ в данный момент времени.

4440.1. Найти выражение ротации плоского вектора $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(r, \varphi)$ в полярных координатах r и φ.

4440.2. Выразить rot $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ а) в цилиндрических координатах; б) в сферических координатах.

4441. Найти поток вектора $\boldsymbol{r}$:

а) через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leqslant z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$;

б) через основание этого конуса.

4442. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}yz + \boldsymbol{j}xz + \boldsymbol{k}xy$: а) через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$; б) через полную поверхность этого цилиндра.

4443. Найти поток радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ через поверхность $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$.

4444. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через положительный октант сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

4445. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$ $(a > 0)$.

Проверить результат, применяя формулу Остроградского.

4445.1. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

4446. Доказать, что поток вектора $\boldsymbol{a}$ через поверхность S, заданную уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ $((u, v) \in \Omega)$, равен

$$\iint_S a_n dS = \iint_\Omega \left(\boldsymbol{a}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) du\,dv,$$

где $a_n = \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S.

4447. Найти поток вектора $\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{r}/r^3$ (m — постоянная) через замкнутую поверхность S, окружающую начало координат.

4448. Найти поток вектора $a(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right)$,

где e_i — постоянные и r_i — расстояния точек M_i (*источники*) от переменной точки $M(\boldsymbol{r})$, через замкнутую поверхность S, окружающую точки M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

4449. Доказать, что $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \nabla^2 u\,dx\,dy\,dz$,

где поверхность S ограничивает тело V.

4450. Количество тепла, протекающее в поле температуры u за единицу времени через элемент поверхности

dS, равно $dQ = -k\boldsymbol{n}\,\mathrm{grad}\,u\,dS$, где k — коэффициент внутренней теплопроводности и $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S. Определить количество тепла, накопленное телом V за единицу времени. Используя скорость повышения температуры, вывести уравнение, которому удовлетворяет температура тела (*уравнение теплопроводности*).

4451. Находящаяся в движении несжимаемая жидкость заполняет объем V. Предполагая, что в области V отсутствуют источники и стоки, вывести *уравнение неразрывности*.

$$\frac{d\rho}{dt} + \mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{v}) = 0,$$

где $\rho = \rho\,(x, y, z)$ — плотность жидкости, $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости, t — время

Указание. Рассмотреть поток жидкости через произвольный объем ω, содержащийся в V.

4452. Найти работу вектора $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$ вдоль отрезка винтовой линии $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}a\sin t + \boldsymbol{k}bt$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

4452.1. Найти работу поля $\boldsymbol{a} = \frac{1}{y}\boldsymbol{i} + \frac{1}{z}\boldsymbol{j} + \frac{1}{x}\boldsymbol{k}$ вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки $M\,(1, 1, 1)$ и $N\,(2, 4, 8)$.

4452.2. Найти работу поля $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}e^{y-z} + \boldsymbol{j}e^{z-x} + \boldsymbol{k}e^{x-y}$ вдоль прямолинейного отрезка между точками $O\,(0, 0, 0)$ и $M\,(1, 3, 5)$.

4452.3. Найти работу поля $\boldsymbol{a} = (y+z)\,\boldsymbol{i} + (2+x)\,\boldsymbol{j} + (x+y)\,\boldsymbol{k}$ вдоль кратчайшей дуги большого круга сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, соединяющей точки $M\,(3, 4, 0)$ и $N\,(0, 0, 5)$.

4453. Найти работу вектора $\boldsymbol{a} = f\,(r)\,\boldsymbol{r}$, где f — непрерывная функция, вдоль дуги AB.

4454. Найти циркуляцию вектора $\boldsymbol{a} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ (c — постоянная): а) вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; б) вдоль окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

4455. Найти циркуляцию Γ вектора $\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\right)$ вдоль контура C в двух случаях: а) C не окружает ось Oz; б) C окружает ось Oz.

4455.1. Дано векторное поле

$$\boldsymbol{a}=\frac{y}{\sqrt{z}}\boldsymbol{i}-\frac{x}{\sqrt{z}}\boldsymbol{j}+\sqrt{xy}\,\boldsymbol{k}.$$

Вычислив $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ в точке $M(1, 1, 1)$, приближенно найти циркуляцию Γ поля вдоль бесконечно малой окружности

$$\left.\begin{array}{l}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\varepsilon^2,\\ (x-1)\cos\alpha+(y-1)\cos\beta+(z-1)\cos\gamma=0,\end{array}\right\}$$

где $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

4456. Плоский установившийся поток жидкости характеризуется вектором скорости

$$\boldsymbol{w}=u(x, y)\,\boldsymbol{i}+v(x, y)\,\boldsymbol{j}.$$

Определить: 1) количество жидкости Q, протекающее через замкнутый контур C, ограничивающий область S (расход жидкости); 2) циркуляцию Γ вектора скорости вдоль контура C. Каким уравнениям удовлетворяют функции u и v, если жидкость несжимаема и поток безвихревой?

4457. Показать, что поле

$$\boldsymbol{a}=yz(2x+y+z)\,\boldsymbol{i}+xz(x+2y+z)\,\boldsymbol{j}+\\ +xy(x+y+2z)\,\boldsymbol{k}$$

— потенциальное и найти потенциал этого поля.

4457.1. Убедившись в потенциальности поля

$$\boldsymbol{a}=\frac{2}{(y+z)^{1/2}}\boldsymbol{i}-\frac{x}{(y+z)^{3/2}}\boldsymbol{j}-\frac{x}{(y+z)^{3/2}}\boldsymbol{k},$$

найти работу поля вдоль пути, соединяющего в положительном октанте точки $M(1, 1, 3)$ и $N(2, 4, 5)$.

4458. Найти потенциал гравитационного поля

$$\boldsymbol{a}=-\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r},$$

создаваемого массой m, помещенной в начале координат.

4459. Найти потенциал гравитационного поля, создаваемого системой масс m_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, помещенных в точках M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$.

4460. Доказать, что поле $\boldsymbol{a}=f(r)\,\boldsymbol{r}$, где $f(r)$ — однозначная непрерывная функция, является потенциальным. Найти потенциал этого поля.